МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.А. АМОСОВ
Н.У. ИГНАТЬЕВА
А.В. ПЕРЕСКОКОВ

ЗАДАЧИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие
по курсу
"Дифференциальные уравнения"
для студентов МЭИ (ТУ), обучающихся по направлениям
"Прикладная математика и информатика" и
"Автоматизация и управление"

Москва Издательство МЭИ 2007

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

УДК
517
А 62
УДК: 517.5

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия для студентов.

Рецензенты:
доктор физ.-мат. наук проф. Дубинский Ю.А.,
доктор физ.-мат. наук проф. Ишмухаметов А.З.

Подготовлено на кафедре математического моделирования.

А.А. Амосов, Н.У. Игнатьева, А.В. Перескоков.
Задачи по вариационному исчислению. - М.: Изд-во МЭИ, 2007. - 64 с.
ISBN 5-7046-0317-3

Пособие содержит задачи по вариационному исчислению. Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, содержащего основные определения и теоремы, и завершается набором задач различного уровня трудности. Часть задач заимствована авторами из задачников и учебников, отраженных в списке литературы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям "Прикладная математика и информатика", "Автоматизация и управление" а также для студентов старших курсов и аспирантов всех факультетов.

1. ФУНКЦИОНАЛЫ, СИЛЬНЫЙ И СЛАБЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

Пусть Y – вещественное линейное нормированное пространство. *Функционалом* называется отображение J, ставящее в соответствие каждому элементу $y \in Y$ вещественное число $J(y)$. Функционал J может быть задан не на всем пространстве Y, а только на некотором его подмножестве M.

В вариационном исчислении наиболее часто используются нормированные пространства $Y = C[a,b]$ с нормой $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$ и $Y = C^1[a,b]$ с нормой $\|y\|_{C^1[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |y'(x)|$.

Широко используются функционалы вида

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x))\, dx, \quad y \in C[a,b], \tag{1.1}$$

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \quad y \in C^1[a,b]. \tag{1.2}$$

Функционал (1.1) задан на пространстве $Y = C[a,b]$. Предполагается, что функция $F(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $[a,b] \times \mathbb{R}$. Функционал (1.2), который принято называть *простейшим функционалом вариационного исчисления*, задан на пространстве $Y = C^1[a,b]$. Предполагается, что функция $F(x,y,z)$ определена и непрерывна на множестве $[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Функцию F часто называют *интегрантом.*

Пусть $y_0 \in Y$. Множество $U_\delta(y_0) = \{y \in Y \mid \|y - y_0\| < \delta\}$ называется δ - окрестностью (или просто окрестностью) точки y_0. (Напомним, что элементы нормированного пространства принято называть точками.)

Пример 1.1. Если $Y \in C[a,b]$, то δ - окрестностью точки $y_0 \in C[a,b]$ является множество

$$U_\delta(y_0) = \{y \in C[a,b] \mid \|y - y_0\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_0(x)| < \delta\}.$$

Пример 1.2. Если $Y = C^1[a,b]$, то δ - окрестностью точки $y_0 \in C^1[a,b]$ является множество

$$U_\delta(y_0) = \{y \in C^1[a,b] \mid \max_{x\in[a,b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x) - y_0'(x)| < \delta\}.$$

Функционал ℓ называется *линейным*, если

$$\ell(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \ell(y_1) + \alpha_2 \ell(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in Y,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Линейный функционал ℓ называется *ограниченным*, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|\ell(y)| \le C\|y\| \quad \forall y \in Y.$$

Приведем примеры линейных ограниченных функционалов. Пусть $\alpha, \beta \in C[a,b]$ – заданные функции.

Пример 1.3. Функционал

$$\ell(y) = \int\limits_a^b \alpha(x) y(x)\, dx,$$

задан на пространстве $Y = C[a,b]$ и является линейным ограниченным.

Пример 1.4. Функционал

$$\ell(y) = \int\limits_a^b (\alpha(x) y(x) + \beta(x) y'(x))\, dx$$

задан на пространстве $Y = C^1[a,b]$ и является линейным ограниченным.

Функционал J называется *непрерывным* в точке y_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|J(y_0 + h) - J(y_0)| < \varepsilon \quad \forall h \in Y : \|h\| < \delta(\varepsilon).$$

Если функционал J непрерывен в каждой точке $y_0 \in Y$, то он называется *непрерывным*.

Теорема 1.1. *Линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Функционал J, заданный в окрестности точки $y_0 \in Y$, называется *сильно дифференцируемым (дифференцируемым по Фреше)* в точке y_0, если существует линейный ограниченный функционал ℓ такой, что

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \ell(h) + \alpha(h) \quad \forall h \in Y,$$

где $\alpha(h) = o(\|h\|)$, т.е. $\dfrac{|\alpha(h)|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$

В этом случае функционал ℓ называется *сильной производной* функционала J в точке y_0 и обозначается через $J'(y_0)$. Величина

$$dJ(y_0, h) = J'(y_0)(h) = \ell(h)$$

называется *сильным дифференциалом* или *дифференциалом Фреше.*

Пример 1.5. Пусть $p, q, f \in C[a,b]$. Рассмотрим *квадратичный функционал*

$$J(y) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [p(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x)]\,dx - \int\limits_a^b f(x)y(x)\,dx,$$

определенный на $Y = C^1[a,b]$. Для него

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \ell(h) + \alpha(h),$$

где

$$\ell(h) = \int\limits_a^b [p(x)y_0'(x)h'(x) + q(x)y_0(x)h(x)]\,dx - \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx,$$

$$\alpha(h) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [p(x)(h'(x))^2 + q(x)h^2(x)]\,dx.$$

Заметим, что функционал ℓ линейный ограниченный, а

$$\frac{|\alpha(h)|}{\|h\|_{C^1[a,b]}} \le (\|p\|_{C[a,b]} + \|q\|_{C[a,b]})\|h\|_{C^1[a,b]} \to 0 \text{ при } \|h\|_{C^1[a,b]} \to 0.$$

Таким образом, квадратичный функционал сильно дифференцируем, причем

$$dJ(y_0, h) = \int\limits_a^b [p(x)y_0'(x)h'(x) + q(x)y_0(x)h(x)]\,dx - \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx.$$

Если для функционала J в точке y_0 для всех $h \in Y$ существует величина

$$\delta J(y_0, h) = \frac{d}{dt}J(y_0 + th)\Big|_{t=0},$$

то она называется *слабым дифференциалом* или *дифференциалом Гато*.

Замечание 1.1. *В вариационном исчислении слабый дифференциал обычно называют первой вариацией функционала J, а приращение $h = y - y_0$ независимой переменной y часто называют вариацией переменной y и обозначают δy.*

Слабый дифференциал (в отличие от сильного) может и не быть линейным по h. Если же он линеен по h и $\delta J(y_0, h) = \ell(h)$, где ℓ – линейный ограниченный функционал, то функционал J называют *слабо дифференцируемым* (*дифференцируемым по Гато*) в точке y_0, а линейный функционал ℓ называют *слабой производной* (или *производной Гато*) и обозначают через $J_w'(y_0)$.

Теорема 1.2. *Если функционал J дифференцируем в точке $y_0 \in Y$ по Фреше, то он дифференцируем в этой точке и по Гато, причем его слабая производная $J_w'(y_0)$ совпадает с сильной производной $J'(y_0)$.*

Говорят, что функционал J имеет в точке y_0 *локальный минимум (максимум)*, если существует окрестность U точки y_0 такая, что $J(y_0) \le J(y)$ $(J(y_0) \ge J(y))$ для всех $y \in U$. Локальный минимум (максимум) называется *строгим*, если $J(y_0) < J(y)$ $(J(y_0) > J(y))$ для всех $y \in U$, $y \ne y_0$. Точки, в которых J имеет локальный минимум или локальный максимум, называют *точками локального экстремума*.

Говорят, что функционал J имеет в точке y_0 *глобальный минимум (максимум)*, если $J(y_0) \le J(y)$ $(J(y_0) \ge J(y))$ для всех $y \in Y$. Глобальный минимум (максимум) называется *строгим*, если $J(y_0) < J(y)$ $(J(y_0) > J(y))$ для всех $y \in Y$, $y \ne y_0$. Точки, в которых J имеет глобальный минимум или глобальный максимум, называют *точками глобального экстремума*.

Для краткости записи задачу о поиске точек экстремума функционала J часто записывают так:

$$J(y) \to \mathrm{extr}.$$

Задачу о поиске локального минимума (максимума) записывают так:

$$J(y) \to \min \quad (J(y) \to \max).$$

Теорема 1.3. *(Необходимое условие экстремума.) Пусть y_0 – точка локального экстремума функционала J. Если в точке y_0 существует первая вариация функционала J, то она равна нулю, то есть*

$$\delta J(y_0, h) = 0 \quad \forall h \in Y. \tag{1.3}$$

Замечание 1.2. Точки $y_0 \in Y$, для которых справедливо свойство (1.3), принято называть *стационарными точками* функционала J.

Рассмотрим задачу о поиске экстремума функционала при дополнительном условии $y \in M \subset Y$ (то есть задачу о поиске условного экстремума). Обозначим эту задачу так:

$$J(y) \to \mathrm{extr}; \quad y \in M. \tag{1.4}$$

Говорят, что функционал J имеет в точке $y_0 \in M$ *локальный минимум (максимум) при условии $y \in M$*, если существует окрестность U точки y_0 такая, что $J(y_0) \le J(y)$ $(J(y_0) \ge J(y))$ для всех $y \in M \cap U$. Точки локального минимума (максимума) при условии $y \in M$ называются *точками локального экстремума функционала J при условии $y \in M$*; эти точки являются решениями задачи (1.4).

Пусть $y_0 \in M$. Назовем элемент $h \in Y$ *допустимым приращением* (*допустимой вариацией*) аргумента, если существует число $\delta > 0$ такое, что $y_0 + th \in M$ для всех $t \in (-\delta, \delta)$.

Теорема 1.4. *(Необходимое условие условного экстремума.) Пусть y_0 – точка локального экстремума функционала J при условии $y \in M$. Если в точке y_0 существует первая вариация функционала J, то*

$$\delta J(y_0, h) = 0 \qquad (1.5)$$

для всех допустимых приращений h.

Замечание 1.3. *Задачу о поиске минимума функционала J принято считать основной. Задача о поиске максимума функционала J легко сводится к задаче поиска минимума функционала $\widetilde{J} = -J$.*

Рассмотрим простейший функционал вариационного исчисления (1.2). Заметим, что в вариационном исчислении частную производную F'_z интегранта F принято обозначать через $F'_{y'}$.

Теорема 1.5. *Пусть $F \in C([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и существуют частные производные $F'_y, F'_{y'} \in C([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Тогда простейший функционал вариационного исчисления (1.2) сильно дифференцируем, причем*

$$dJ(y,h) = \int\limits_a^b [F'_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x)]\, dx.$$

Следствие 1.1. *Поскольку функционал J сильно дифференцируем, то он и слабо дифференцируем, причем*

$$\delta J(y,h) = \int\limits_a^b [F'_y(x, y(x), y'(x))h(x) + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x)]\, dx. \qquad (1.6)$$

Задачи

1.1. Пусть функционалы $J_1(y)$ и $J_2(y)$ дифференцируемы по Фреше в точке y_0. Показать, что функционал $J(y) = \alpha_1\, J_1(y) + \alpha_2\, J_2(y)$ дифференцируем по Фреше в точке y_0, причем

$$dJ(y_0, h) = \alpha_1 dJ_1(y_0, h) + \alpha_2 dJ_2(y_0, h).$$

1.2. Пусть функционалы $J_1(y)$ и $J_2(y)$ имеют в точке y_0 первую вариацию. Показать, что функционал $J(y) = \alpha_1 J_1(y) + \alpha_2 J_2(y)$ также имеет в точке y_0 первую вариацию, причем

$$\delta J(y_0, h) = \alpha_1 \delta J_1(y_0, h) + \alpha_2 \delta J_2(y_0, h).$$

1.3. Пусть $J(y) = c_0$ для всех $y \in Y$. Найти сильную (слабую) производную этого функционала-константы.

1.4. Пусть $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$ при $x_1^2 + x_2^2 > 0$ и $f(0,0) = 0$. Показать, что в точке $(0,0)$ функция f дифференцируема по Гато, но не дифференцируема в ней по Фреше.

1.5. Показать, что из сильной дифференцируемости функционала J в точке y_0 следует его непрерывность в этой точке.

1.6. Следует ли из слабой дифференцируемости функционала J в точке y_0 его непрерывность в этой точке?

1.7. Пусть $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^3 - 3x_1x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$ при $x_1^2 + x_2^2 > 0$ и $f(0,0) = 0$. Показать, что функция f имеет в точке $x = (0,0)$ слабый дифференциал, но не является слабо дифференцируемой.

1.8. Для функционала $J(y) = \|y\|^2$, заданного на евклидовом пространстве, найти производную и дифференциал Фреше.

1.9. При каких значениях параметра $\alpha > 0$ дифференцируем функционал $J(y) = \|y\|^\alpha$, заданный на евклидовом пространстве?

1.10. Пусть функция $F(x, y)$ и частная производная $F'_y(x, y)$ непрерывны на $[a, b] \times \mathbb{R}$. Является ли функционал (1.1) дифференцируемым: а) по Гато; б) по Фреше? Существует ли у него: а) слабая производная: б) сильная производная?

Доказать, что функционал J дифференцируем по Фреше. Найти его сильную производную и дифференциал Фреше.

1.11. $J(y) = y(a), \quad y \in C[a, b].$

1.12. $J(y) = \sin y(a) + \cos y(b), \quad y \in C[a, b].$

1.13. $J(y) = \int\limits_a^b \sin y(x)\,dx, \quad y \in C[a, b].$

1.14. $J(y) = \sin\left(\int\limits_a^b y(x)\,dx\right), \quad y \in C[a, b].$

Доказать, что функционал J дифференцируем по Гато. Найти первую вариацию функционала и слабую производную.

1.15. $J(y) = y(0) + \int\limits_{-1}^1 xy(x)\,dx, \quad y \in C[-1, 1].$

1.16. $J(y) = y(a)y(b), \quad y \in C[a, b].$

1.17. $J(y) = \int\limits_a^b y(x)y'(x)\,dx, \quad y \in C^1[a, b].$

2. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

2.1. Основная лемма вариационного исчисления. Лемма Дюбуа-Реймона.

Функция φ, определенная на отрезке $[a,b]$, называется *финитной* на этом отрезке, если существует $\varepsilon \in (0, b-a)$ такое, что $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in [a, a+\varepsilon]$ и $x \in [b-\varepsilon, b]$.

Обозначим через $C_0^\infty[a,b]$ множество всех заданных на $[a,b]$ бесконечно дифференцируемых финитных функций. Ясно, что $C_0^\infty[a,b]$ – линейное пространство, являющееся подпространством пространства $C^1[a,b]$.

Теорема 2.1. *(Основная лемма вариационного исчисления.) Пусть функция $f \in C[a,b]$ удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a,b].$$

Тогда $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Теорема 2.2. *(Лемма Дюбуа-Реймона.) Пусть функции $f, g \in C[a,b]$ удовлетворяют интегральному тождеству*

$$\int\limits_a^b [g(x)h'(x) + f(x)h(x)]\,dx = 0 \quad \forall h \in C_0^\infty[a,b].$$

Тогда $g \in C^1[a,b]$ и $g'(x) \equiv f(x)$.

2.2. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами). Уравнение Эйлера.

Рассмотрим задачу о поиске точки локального экстремума простейшего функционала вариационного исчисления

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{2.1}$$

на пространстве $Y = C^1[a,b]$ при дополнительном ограничении

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \tag{2.2}$$

означающем, что концы искомой кривой закреплены. Эту задачу часто называют *задачей с закрепленными концами* или *простейшей задачей вариационного исчисления.*

Мы будем символически записывать ее в виде

$$\int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \tag{2.3}$$

В задаче с закрепленными концами условия (2.2) задают множество $M = \{y \in C^1[a,b] \mid y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$, на котором ищется точка экстремума. Заметим, что допустимые вариации переменной y образуют множество

$$\overset{0}{C}{}^1[a,b] = \{h \in C^1[a,b] \mid h(a) = 0,\ h(b) = 0\},$$

подмножеством которого является $C_0^\infty[a,b]$.

Пусть функция $y_0 \in C^1[a,b]$ является решением задачи (2.3). Тогда согласно необходимому условию экстремума (1.5) с учетом формулы (1.6) для первой вариации функционала (2.1) справедливо тождество

$$\delta J(y_0, h) = \int_a^b [F'_y(x, y_0, y'_0)h + F'_{y'}(x, y_0, y'_0)h']\, dx = 0 \ \ \forall h \in C_0^\infty[a,b]. \quad (2.4)$$

В силу леммы Дюбуа-Реймона функция $F'_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$ имеет непрерывную на $[a,b]$ производную $\dfrac{d}{dx}F'_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x))$, причем

$$\frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y_0(x), y'_0(x)) \equiv F'_y(x, y_0(x), y'_0(x)). \quad (2.5)$$

Таким образом, функция y_0 обязана удовлетворять дифференциальному уравнению второго порядка

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0. \quad (2.6)$$

Это уравнение называют *уравнением Эйлера* (или *уравнением Эйлера-Лагранжа*) для функционала (2.1). Решения уравнения Эйлера принято называть *экстремалями* функционала (2.1).

Итак, если функция $y_0 \in C^1[a,b]$ является точкой локального экстремума функционала (2.1) в задаче с закрепленными концами, то она является решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0,$$
$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Решения этой задачи мы будем называть *экстремалями задачи с закрепленными концами.*

Пример 2.1. Найдем экстремали задачи

$$\int_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2]\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1.$$

Поскольку $F'_y = -2y$, $F'_{y'} = 2y'$, то уравнение Эйлера (2.6) принимает вид

$$y'' + y = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Учитывая граничные условия $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$, находим единственную экстремаль $y(x) = \sin x$.

2.3. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

Случай 1. F не зависит от y', то есть $F = F(x, y)$.

В этом случае $F'_{y'} = 0$ и уравнение Эйлера (2.6) имеет вид

$$F'_y(x, y(x)) = 0.$$

Это уравнение является нелинейным уравнением относительно $y(x)$, но не является дифференциальным. Решение этого уравнения, как правило, не удовлетворяет заданным граничным условиям.

Пример 2.2. Для функционала $J(y) = \int\limits_0^1 y^2(x)\,dx$ уравнение Эйлера принимает вид $y(x) = 0$.

Случай 2. F линейно зависит от y', то есть

$$F(x, y, y') = A(x, y) + B(x, y)y'.$$

В этом случае $F'_y = A'_y + B'_y y'$, $F'_{y'} = B$ и поэтому

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'} + F'_y = -B'_x - B'_y y' + A'_y + B'_y y' = -B'_x + A'_y.$$

Таким образом уравнение Эйлера принимает вид

$$-B'_x(x, y(x)) + A'_y(x, y(x)) = 0. \tag{2.7}$$

Как и в предыдущем случае это уравнение является нелинейным уравнением относительно $y(x)$, но не является дифференциальным.

Замечание 2.1. *Если функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ таковы, что*

$$A'_y(x, y) \equiv B'_x(x, y), \tag{2.8}$$

то уравнение (2.7) принимает вид

$$0 = 0,$$

и тогда экстремалями функционала являются все функции $y \in C^1[a, b]$.

Дело в том, что выполнение свойства (2.8) гарантирует наличие функции $u(x,y)$ такой, что

$$u'_x(x,y) \equiv A(x,y), \quad u'_y(x,y) \equiv B(x,y).$$

Поэтому функционал J принимает постоянное значение

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx} u(x,y(x))\,dx = u(b,y(b)) - u(a,y(a))$$

для всякой функции $y \in C^1[a,b]$, удовлетворяющей условиям (2.2).

Случай 3. F зависит только от y', то есть $F = F(y')$. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$-\frac{d}{dx} F'_{y'}(y') = 0 \Leftrightarrow F'_{y'}(y') = C.$$

Ясно, что всякая линейная функция $y(x) = C_1 x + C_2$ является решением этого уравнения, соответствующим $C = F'_{y'}(C_1)$. Если функция $F'_{y'}$ строго монотонна, то других решений у уравнения нет.

Пример 2.3. Экстремалями функционала $J(y) = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$, задающего длину кривой, описываемой функцией $y(x)$, являются линейные функции $y(x) = C_1 x + C_2$.

Случай 4. F зависит только от x и y', то есть $F = F(x,y')$.

В этом случае уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dx} F'_{y'}(x,y') = 0 \Leftrightarrow F'_{y'}(x,y') = C.$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка

$$F'_{y'}(x,y') = C.$$

Случай 5. F зависит только от y и y', то есть $F = F(y,y')$.

Предположим, что у функции F существуют непрерывные производные $F''_{y'y'} \neq 0$ и $F''_{y'y}$, а у решения уравнения Эйлера есть вторая производная y''. Тогда уравнение Эйлера может быть записано в виде

$$-F''_{y'y} y' - F''_{y'y'} y'' + F'_y = 0.$$

Умножим его на y':

$$-F''_{y'y}(y')^2 - F''_{y'y'} y'' y' + F'_y y' = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(-y' F'_{y'} + F) = 0 \Leftrightarrow F - y' F'_{y'} = C.$$

В этом случае задача сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$F(y, y') - y' F'_{y'}(y, y') = C. \tag{2.7}$$

Пример 2.4. (Задача о брахистохроне.) В 1696 году Иоганн Бернулли опубликовал письмо, в котором предлагал вниманию математиков задачу о линии наискорейшего спуска – брахистохроне (от греческого brachistos - кратчайший и chronos - время): "Точки A и B, не лежащие на одной вертикальной прямой следует соединить кривой, обладающей тем свойством, что материальная точка скатится из точки A в точку B за минимальное время."

Поместим начало координат в точку A и направим ось Oy вертикально вниз. Пусть точка B имеет координаты (b, H). Тогда искомая кривая является решением задачи

$$\int\limits_0^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,dx \to \min; \quad y(0) = 0, \quad y(b) = H.$$

Поскольку подынтегральная функция зависит только от y и y', то нахождение экстремалей сводится к решению уравнения (2.7). В данном случае оно принимает вид

$$\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}} = C_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(1+(y')^2) = C \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{C-y}{y}}.$$

Здесь $C = \dfrac{1}{2gC_0^2} > 0$.

Учитывая, что из смысла задачи о брахистохроне $y' > 0$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{C-y}{y}}.$$

Будем искать решение этого уравнения в параметрическом виде. Положив $y = y(t) = \dfrac{C}{2} - \dfrac{C}{2}\cos t = C\sin^2\dfrac{t}{2}$, имеем

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \sqrt{\frac{C\cos^2\frac{t}{2}}{C\sin^2\frac{t}{2}}} \Leftrightarrow \frac{C\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{x'(t)} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \Leftrightarrow x'(t) = C\sin^2\frac{t}{2},$$

$$x'(t) = \frac{C}{2}(1-\cos t) \Leftrightarrow x(t) = \frac{C}{2}(t - \sin t) + C_1.$$

Поскольку $x(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Таким образом, если задача о брахистохроне имеет решение, то этим решением является

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{C}{2}(t - \sin t), \\ y(t) = \dfrac{C}{2}(1 - \cos t). \end{cases}$$

Значит, искомая кривая - циклоида.

Пример 2.5. Рассмотрим задачу о наименьшей поверхности вращения

$$2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx \to \min; \quad y(a) = y_a \geq 0, y(b) = y_b \geq 0.$$

Как и в предыдущем примере, уравнение Эйлера сводится к уравнению (2.7). В данном случае это уравнение принимает вид

$$y\sqrt{1 + (y')^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}.$$

Будем искать решение в параметрическом виде: $y = y(t)$, $x = x(t)$. Положим $y(t) = C\operatorname{ch} t$. Тогда $y'(t) = C\operatorname{sh} t$ и поэтому

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1} \Leftrightarrow \frac{C\operatorname{sh} t}{x'(t)} = \pm\operatorname{sh} t \Leftrightarrow x'(t) = \pm C \Leftrightarrow x(t) = \pm(Ct + C_1).$$

Итак, $y = C\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{C} + C_2\right)$. Постоянные C, C_2 определяются из граничных условий. Решений может быть одно, два или ни одного.

Задачи

2.1. Показать, что функция

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)}, & t \in (-1, 1), \\ 0, & t \notin (-1, 1). \end{cases}$$

является бесконечно дифференцируемой и финитной на отрезке $[a, b]$, если $a < -1$ и $1 < b$.

2.2. Пусть функция $g \in C[a, b]$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_a^b g(x)h'(x)\, dx = 0 \quad \forall h \in C_0^\infty[a, b].$$

Доказать, что $g = \mathrm{const}$.

Найти экстремали задачи

2.3. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 2x^4 y' + 4xy]\, dx \to extr; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

2.4. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 12xy]\, dx \to extr; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$

2.5. $\int\limits_a^b [xy' + y]\, dx \to extr; \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b.$

2.6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x}\, dx \to extr; \quad y(1) = 0,\ y(2) = 2.$

2.7. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + 2xyy']\, dx \to extr; \quad y(0) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1.$

2.8. $\int\limits_a^b [xy + y^2 - 2y^2 y']\, dx \to extr; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

2.9. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + xy]\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

2.10. $\int\limits_1^e x(y')^2\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(1) = 0,\ y(e) = 1.$

2.11. $\displaystyle\int_0^{4/3} \frac{y}{(y')^2}\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 1,\ y\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9}.$

2.12. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2 + 4y\cos x]\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

2.13. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

2.14. $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{x + 2y}{x^2 + y^2} - \frac{2x - y}{x^2 + y^2}y'\right) dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 1,\ y(3) = 2.$

2.15. $\int\limits_2^7 (\cos x + 3x^2 y + (x^3 - y^3)y')\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(2) = 3,\ y(7) = 0.$

2.16. $\int\limits_{-1}^1 (xy' + (y')^2)\, dx \to \mathrm{extr}; \quad y(-1) = 1,\ y(1) = 0.$

3. ЗАДАЧА СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим задачу о поиске экстремума простейшего функционала вариационного исчисления

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

на пространстве $Y = C^1[a, b]$.

Здесь, в отличие от задачи с закрепленными концами, не накладывается никаких дополнительных ограничений на поведение искомой функции на концах отрезка. Поэтому эту задачу принято называть *задачей со свободными концами.*

Мы будем символически записывать ее в виде

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \to \text{extr.} \tag{3.1}$$

Предположим, что существует функция y_0, являющаяся решением задачи со свободными концами. Тогда согласно необходимому условию экстремума (1.3) справедливо тождество

$$\delta J(y_0, h) = \int_a^b [F'_y(x, y_0, y_0')h + F'_{y'}(x, y_0, y_0')h']\, dx = 0 \;\; \forall h \in C^1[a, b]. \tag{3.2}$$

Поскольку $C_0^\infty[a, b] \subset C^1[a, b]$, то из (3.2) следует тождество (2.4). Из него, как показано в п. 2.2, следует, что функция y_0 обязана удовлетворять уравнению Эйлера (2.6).

В силу формулы интегрирования по частям из (3.2) следует тождество

$$\int_a^b \left[F'_y(x, y_0, y_0') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y_0, y_0')\right] h\, dx +$$
$$+ [F'_{y'}(x, y_0, y_0')h]|_{x=b} - [F'_{y'}(x, y_0, y_0')h]|_{x=a} = 0 \quad \forall h \in C^1[a, b].$$

Первое слагаемое в левой части тождества равно нулю, так как y_0 удовлетворяет уравнению (2.6). Поэтому

$$F'_{y'}(b, y_0(b), y_0'(b))h(b) - F'_{y'}(a, y_0(a), y_0'(a))h(a) = 0 \quad \forall h \in C^1[a, b].$$

Подставляя в это тождество $h(x) = \dfrac{b - x}{b - a}$ и $h(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$, убеждаемся в том, что

$$F'_{y'}(x, y_0, y_0')|_{x=a} = 0, \quad F'_{y'}(x, y_0, y_0')|_{x=b} = 0.$$

Итак, если функция $y_0 \in C^1[a, b]$ является решением задачи со свободными концами, то она является решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y') + F'_y(x,y,y') = 0, \tag{3.3}$$

$$F'_{y'}(x,y,y')|_{x=a} = 0, \quad F'_{y'}(x,y,y')|_{x=b} = 0. \tag{3.4}$$

Отметим, что краевые условия (3.4) принято называть *естественными краевыми условиями.*

Решения краевой задачи (3.3), (3.4) называют *экстремалями задачи со свободными концами.*

Пример 3.1. Рассмотрим задачу со свободными концами для квадратичного функционала

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_a^b [p(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x)]\,dx - \int_a^b f(x)y(x)\,dx.$$

Здесь $F(x,y,y') = \frac{1}{2}[p(x)(y')^2 + q(x)y^2] - f(x)y$, $F'_{y'}(x,y,y') = p(x)y'$, $F'_y(x,y,y') = q(x)y - f(x)$. Поэтому уравнение Эйлера принимает вид

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x),$$

а естественные граничные условия – вид

$$p(a)y'(a) = 0, \quad p(b)y'(b) = 0.$$

Пример 3.2. Найдем экстремали задачи

$$\int_0^1 [(y')^2 + (12x-6)y]\,dx \to \text{extr}.$$

Поскольку $F'_{y'} = 2y'$, $F'_y = 12x - 6$, то уравнение Эйлера и естественные граничные условия принимают вид

$$y'' = 6x - 3,$$
$$y'(0) = 0, \;\; y'(1) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Поскольку $y'(x) = 3x^2 - 3x + C_1$, то в силу граничных условий имеем $C_1 = 0$. Таким образом, экстремали задачи имеют вид

$$y(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Задачи

Найти экстремали задачи

3.1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(y')^2}{x^2}\,dx \to extr.$

3.2. $\int_0^1 [xy' + (y')^2]\,dx \to \text{extr.}$

3.3. $\int_1^3 y'(1 + x^2y')\,dx \to \text{extr.}$

3.4. $\int_0^{\pi/2} [y^2 - (y')^2 - 2y\sin x]\,dx \to \text{extr.}$

3.5. $\int_0^1 [(y')^2 + 2yy' - 16y^2]\,dx \to \text{extr.}$

3.6. $\int_{-1}^1 [y^2 + (y')^2 + 2ye^x]\,dx \to \text{extr.}$

3.7. $\int_0^{\pi/2} [y^2 + (y')^2 - 2y\sin x]\,dx \to \text{extr.}$

3.8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}\,dx \to extr.$

3.9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + y^2}{(y')^2}\,dx \to \text{extr.}$

3.10. $\int_1^e [x^2(y')^2 + 2y^2 + 2xy]\,dx \to \text{extr.}$

3.11. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y^2 - (y')^2 - \frac{2y}{\sin x}\right]\,dx \to \text{extr.}$

4. ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

Рассмотрим задачу о поиске локального экстремума простейшего функционала вариационного исчисления в предположении, что левый конец искомой кривой закреплен: $y(a) = y_a$, а правый скользит по гладкой кривой $y = \varphi(x)$, т.е. удовлетворяет условию $y(b) = \varphi(b)$, где значение b не является фиксированным.

Таким образом ищется точка экстремума функционала

$$J(y, b) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx, \tag{4.1}$$

причем искомыми величинами являются точка $b_0 > a$ и функция $y_0 \in C^1[a, b_0]$, на которых реализуется экстремум функционала (4.1).

Эту задачу мы будем называть *задачей с правым подвижным концом* и символически записывать в виде

$$\int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \to \text{extr}; \quad y(a) = y_a,\ y(b) = \varphi(b). \tag{4.2}$$

Пусть (y_0, b_0) – решение рассматриваемой задачи. Ясно, что при фиксированном $b = b_0$ функция y_0 дает экстремум функционалу J на множестве всех функций $y \in C^1[a, b_0]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b_0) = \varphi(b_0),$$

то есть является решением задачи с закрепленными концами. Следовательно y_0 удовлетворяет на отрезке $[a, b_0]$ уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0.$$

Продолжим функцию y_0 для $x \geq b_0$ (например, линейно). Рассмотрим семейство функций вида

$$y(x, b) = y_0(x) + \frac{\varphi(b) - y_0(b)}{b - a}(x - a).$$

Ясно, что эти функции принадлежат $C^1[a, b]$ и удовлетворяют граничным условиям

$$y(x, b)|_{x=a} = y_a, \quad y(x, b)|_{x=b} = \varphi(b).$$

Рассматривая функционал J только на функциях из этого семейства, получим функцию

$$\Psi(b) = \int\limits_a^b F(x, y(x, b), y'_x(x, b))\, dx,$$

имеющую в точке $b = b_0$ локальный экстремум. Вычислим ее производную:

$$\Psi'(b) = F(x, y(x,b), y'(x,b))|_{x=b} +$$
$$+\int\limits_a^b [F'_y(x, y(x,b), y'_x(x,b)) y'_b(x,b) + F'_{y'}(x, y(x,b), y'_x(x,b)) y''_{xb}(x,b)]\,dx.$$

Необходимое условие экстремума $\Psi'(b_0) = 0$ принимает вид

$$\int\limits_a^{b_0} [F'_y(x, y_0, y'_0) y'_b(x, b_0) + F'_{y'}(x, y_0, y'_0) y''_{xb}(x, b_0)]\,dx + F(x, y_0, y'_0)|_{x=b_0} = 0.$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям, перебросив производную по x с y''_{xb} на $F'_{y'}(x, y_0, y'_0)$:

$$\int\limits_a^b [F'_y(x, y_0, y'_0) - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y_0, y'_0)] y'_b(x, b_0)\,dx +$$
$$+ F'_{y'}(x, y_0, y'_0) y'_b(x, b_0)|_{x=b_0} + F(x, y_0, y'_0)|_{x=b_0} = 0.$$

Первое слагаемое в левой части этого равенства равно нулю, так как функция y_0 удовлетворяет уравнению Эйлера. Поэтому

$$[F'_{y'}(x, y_0, y'_0) y'_b(x, b_0) + F(x, y_0, y'_0)]|_{x=b_0} = 0.$$

Учитывая, что

$$y'_b(x,b) = \frac{\varphi'(b) - y'_0(b)}{b-a}(x-a) - \frac{\varphi(b) - y_0(b)}{(b-a)^2}(x-a),$$

имеем: $y'_b(x, b_0)|_{x=b_0} = \varphi'(b_0) - y'_0(b_0)$. Отсюда следует, что функция y_0 обязана удовлетворять краевому условию

$$[F'_{y'}(x, y, y')(\varphi' - y') + F(x, y, y')]|_{x=b_0, y=y_0} = 0,$$

которое принято называть *условием трансверсальности*.

Итак, решение задачи задачи с правым подвижным концом обязано удовлетворять уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0$$

и краевым условиям

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = \varphi(b),$$
$$F'_{y'}(b, y(b), y'(b))(\varphi'(b) - y'(b)) + F(b, y(b), y'(b)) = 0.$$

Если подвижной является левая граница, т.е. $y(a) = \psi(a)$, где ψ – заданная функция, то условие трансверсальности для левой границы принимает вид

$$[F'_{y'}(x, y, y')(\psi' - y') + F(x, y, y')]|_{x=a_0, y=y_0} = 0.$$

Пример 4.1. Выпишем условие трансверсальности для функционала
$$\int\limits_a^b A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$
где $A(x,y)>0$. Имеем
$$F'_{y'}(x,y,y')(\varphi'-y')+F(x,y,y')=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+(y')^2}}(\varphi'-y')+A(x,y)\sqrt{1+(y')^2} \Leftrightarrow A(x,y)\frac{\varphi'y'+1}{\sqrt{1+(y')^2}}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \varphi'(b)y'(b)=-1.$$
Это есть условие ортогональности искомой интегральной кривой заданной кривой $y=\varphi(x)$.

Задачи

Найти экстремали вариационной задачи с подвижным концом.

4.1. $\int\limits_0^b (y')^2\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ y(b)+1+b=0.$

4.2. $\int\limits_0^b (y')^3\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ b+y(b)=1.$

4.3. $\int\limits_a^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad y(a)=a,\ y(1)=0.$

4.4. $\int\limits_0^b (y')^2\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ (b-1)y(b)+2=0.$

4.5. $\int\limits_a^0 [(y')^2+y]\,dx \to extr;\ \ y(a)=c$ (где $c=\mathrm{const}>0$), $y(0)=0.$

4.6. $\int\limits_0^b [(y')^2+y]\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ y(b)=b.$

4.7. $\int\limits_0^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ b^2y(b)=1.$

4.8. $\displaystyle\int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\,dx \to extr;\quad y(0)=0,\ y(b)=b-5.$

4.9. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,3)$ до прямой $y=1-3x$.

4.10. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

4.11. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1,2)$ до параболы $y=x^2$.

5. ЗАДАЧА БОЛЬЦА

Задачей Больца называется задача о поиске экстремума *функционала Больца*

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx + g(y(a), y(b)) \tag{5.1}$$

на пространстве $Y = C^1[a,b]$.

Символически эту задачу мы будем записывать в виде

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx + g(y(a), y(b)) \to \text{extr}. \tag{5.2}$$

Заметим, что функционал Больца отличается от простейшего функционала вариационного исчисления

$$J_0(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

дополнительным слагаемым $J_1(y) = g(y(a), y(b))$. Функцию $g(u, v)$, задающую это слагаемое, часто называют *терминантом* или *терминальной функцией*.

Вычислим вариацию функционала (5.1). Напомним, что

$$\delta J_0(y,h) = \int_a^b [F'_{y'}(x, y(x), y'(x))h'(x) + F'_y(x, y(x), y'(x))h(x)]\,dx$$

Вычислим вариацию функционала J_1. Положив $\varphi_1(t) = J_1(y + th) = g(y(a) + th(a), y(b) + th(b))$, имеем

$$\delta J_1(y,h) = \varphi_1'(0) = g'_u(y(a), y(b))h(a) + g'_v(y(a), y(b))h(b).$$

Таким образом,

$$\delta J(y,h) = \int_a^b [F'_{y'}(x, y, y')h'(x) + F'_y(x, y, y')h(x)]\,dx + \\ + g'_u(y(a), y(b))h(a) + g'_v(y(a), y(b))h(b).$$

Пусть $y_0 \in C^1[a,b]$ – функция, на которой реализуется экстремум функционала Больца. Выпишем необходимое условие экстремума

$$\delta J(y_0,h) = \int_a^b [F'_{y'}(x, y_0, y_0')h'(x) + F'_y(x, y_0, y_0')h(x)]\,dx + \\ + g'_u(y_0(a), y_0(b))h(a) + g'_v(y_0(a), y_0(b))h(b) = 0 \quad \forall h \in C^1[a,b]. \tag{5.3}$$

Из этого тождества для $h \in C_0^\infty[a,b]$ следует тождество (2.4). Следовательно функция y_0 удовлетворяет уравнению Эйлера (2.6). Проинтегрировав по частям в тождестве (5.3), получим

$$\int\limits_a^b \left[-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y_0,y_0')+F'_y(x,y_0,y_0')\right]h(x)\,dx+$$
$$+F'_{y'}(x,y_0,y_0')|_{x=b}h(b)-F'_{y'}(x,y_0,y_0')|_{x=a}h(a)+$$
$$+g'_u(y_0(a),y_0(b))h(a)+g'_v(y_0(a),y_0(b))h(b)=0\quad \forall h\in C^1[a,b].$$

Отсюда

$$[F'_{y'}(b,y_0(b),y_0'(b))+g'_v(y_0(a),y_0(b))]h(b)+$$
$$+[-F'_{y'}(a,y_0(a),y_0'(a))+g'_u(y_0(a),y_0(b))]h(a)=0\qquad \forall h\in C^1[a,b].$$

Пользуясь произволом в выборе $h(a)$ и $h(b)$, приходим к краевым условиям

$$-F'_{y'}(a,y_0(a),y_0'(a))+g'_u(y_0(a),y_0(b))=0,$$
$$F'_{y'}(b,y_0(b),y_0'(b))+g'_v(y_0(a),y_0(b))=0,$$

которые принято называть *условиями трансверсальности.*

Таким образом, функция y_0, на которой реализуется локальный экстремум функционала Больца, является решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y')+F'_y(x,y,y')=0, \tag{5.4}$$
$$-F'_{y'}(a,y(a),y'(a))+g'_u(y(a),y(b))=0, \tag{5.5}$$
$$F'_{y'}(b,y(b),y'(b))+g'_v(y(a),y(b))=0. \tag{5.6}$$

Решения задачи (5.4) - (5.6) мы будем называть *экстремалями задачи* (5.2).

Если значение искомой функции на левой границе отрезка фиксировано ($y(a)=y_a$), функционал Больца принимает вид

$$J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx+g(y(b)).$$

В этом случае функция y_0, на которой реализуется локальный экстремум функционала Больца, является решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y')+F'_y(x,y,y')=0,$$
$$y(a)=y_a,\quad F'_{y'}(b,y(b),y'(b))+g'(y(b))=0.$$

Аналогично, если фиксировано значение искомой функции на правой границе ($y(b) = y_b$), то функционал Больца принимает вид

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx + g(y(a)),$$

а функция y_0, на которой реализуется локальный экстремум функционала Больца, является решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0,$$
$$-F'_{y'}(a, y(a), y'(a)) + g'(y(a)) = 0, \quad y(b) = y_b.$$

Пример 5.1. Для квадратичного функционала Больца

$$J(y) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2]\, dx - \int\limits_a^b f(x)y(x)\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\sigma_a y(a)^2 - g_a y(a) + \frac{1}{2}\sigma_b y(b)^2 - g_b y(b)$$

необходимые условия экстремума принимают вид

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x),$$
$$-p(a)\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} + \sigma_a y(a) = g_a, \quad p(b)\frac{dy}{dx}\Big|_{x=b} + \sigma_b y(b) = g_b.$$

Задачи

Найти экстремали задачи Больца

5.1. $\int\limits_0^1 (y')^2\, dx + 5y^2(1) \to extr; \quad y(0) = 1.$

5.2. $\int\limits_1^3 x^2(y')^2\, dx - 6y(1) \to extr; \quad y(3) = 1.$

5.3. $\int\limits_1^2 [(y')^2 + 4y]\, dx + y^2(1) \to extr; \quad y(2) = 5.$

5.4. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 4y^2]\, dx - 4\,\mathrm{sh}\, 2 \cdot y(1) \to extr; \quad y(0) = 1.$

5.5. $\int\limits_1^2 [x^2(y')^2 + 4xy]\, dx + y^2(1) \to extr; \quad y(2) = \frac{1}{2}.$

5.6. $\int\limits_0^1 [(y')^2 - y]\, dx - \frac{y^2(1)}{2} \to extr.$

5.7. $\int\limits_0^1 (y')^2\, dx + 4y^2(0) - 5y^2(1) \to extr.$

5.8. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2]\, dx + y^2(0) + y^2(\pi/2) - 4y(\pi/2) \to extr.$

5.9. $\int\limits_0^{1} [(y')^2 + y^2]\, dx - 2\ \mathrm{sh}\, 1 \cdot y(1) \to extr.$

5.10. $\int\limits_1^{2} x^2(y')^2\, dx - 2y(1) + y^2(1) \to extr.$

5.11. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2 - 2y]\, dx - 2y^2(0) - y^2(\pi/2) \to extr.$

5.12. $\int\limits_0^{e-1} (x+1)(y')^2\, dx + 2y(0)(y(e-1)+1) \to extr.$

5.13. $\int\limits_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 - 4y\sin x]\, dx + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi) \to extr.$

5.14. $\int\limits_1^{e} 2[x(y')^2 + yy']\, dx + 3y^2(1) - y^2(e) - 4y(e) \to extr.$

5.15. $\int\limits_0^{3} 4(y')^2 y^2\, dx + y^4(0) - 8y(3) \to extr.$

6. ФУНКЦИОНАЛЫ ВИДА $J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx$

Рассмотрим задачу поиска локального экстремума функционала

$$J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}(x), \vec{y}\,'(x))\,dx \tag{6.1}$$

(где $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)) \in C^1[a,b]$) при заданных условиях

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a, \quad \vec{y}(b) = \vec{y}_b. \tag{6.2}$$

Будем символически записывать ее в виде

$$\int\limits_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx \to \mathrm{extr}; \quad \vec{y}(a) = \vec{y}_a,\ \vec{y}(b) = \vec{y}_b. \tag{6.3}$$

Предположим, что $F \in C([a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и существуют производные $F'_{y_i}, F'_{y'_i} \in C([a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $\vec{y}_0 \in C^1[a,b]$ – вектор-функция, являющаяся решением задачи (6.3). Фиксируем все ее компоненты y_{0j} кроме компоненты с номером i. Ясно, что функция y_{0i} является точкой экстремума функционала

$$J_i(y_i) = J(y_{01}, \ldots, y_{0,i-1}, y_i, y_{0,i+1}, \ldots, y_{0m}) =$$

$$= \int\limits_a^b F(x, y_{01}, ..., y_{0,i-1}, y_i, y_{0,i+1}, ..., y_{0m}, y'_{01}, ..., y'_{0,i-1}, y'_i, y'_{0,i+1}, \ldots, y'_{0m})\,dx.$$

В силу необходимого условия экстремума для этого простейшего функционала вариационного исчисления вектор-функция $\vec{y}_0$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'_i}(x, \vec{y}, \vec{y}\,') + F'_{y_i}(x, \vec{y}, \vec{y}\,') = 0. \tag{6.4}$$

Поскольку эти уравнения должны выполняться для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то мы имеем дело с системой уравнений Эйлера. Решения системы (6.4) мы будем называть *экстремалями функционала* (6.1).

Дополняя систему краевыми условиями (6.2), приходим к краевой задаче (6.4), (6.2). Решения этой задачи мы будем называть *экстремалями задачи* (6.3).

В случае, когда рассматривается задача со свободными концами

$$\int\limits_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx \to \mathrm{extr},$$

условия (6.2) заменяются естественными краевыми условиями

$$F'_{y'_i}(a, \vec{y}(a), \vec{y}\,'(a)) = 0, \quad F'_{y'_i}(b, \vec{y}(b), \vec{y}\,'(b)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Пример 6.1. Найдем экстремали задачи

$$\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 + 2yz]\, dx \to \mathrm{extr};$$

$$y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y(\pi/2) = 1,\ z(\pi/2) = -1.$$

Для рассматриваемого функционала система уравнений Эйлера (6.4) принимает вид

$$\begin{cases} -2y'' + 2z = 0 \\ -2z'' + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'' = z \\ z'' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^{(4)} = y \\ z = y'' \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x, \\ z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x. \end{cases}$$

Учитывая граничные условия, имеем

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_4 = 1, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0, \\ C_3 = 0, \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

Таким образом, экстремаль имеет вид $y = \sin x,\ z = -\sin x$.

Задачи

6.1. Найти экстремали функционала

$$J(y,z) = \int\limits_a^b F(y', z')\, dx$$

в предположении, что функция $F(u,v)$ непрерывно дифференцируема, а ее частные производные $F'_u(u,v)$, $F'_v(u,v)$ строго монотонны по аргументам u и v.

6.2. Найти экстремали функционала

$$J(y,z) = \int\limits_a^b (2yz - 2y^2 + (y')^2 - (z')^2)\, dx.$$

Найти экстремали задачи

6.3. $\int\limits_0^{\pi/4} [2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\ z\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0.$

6.4. $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \left[2xy - (y')^2 - \frac{1}{3}(z')^2\right] dx \to \text{extr};$

$y(-1) = 2,\ z(-1) = -1,\ y(1) = 0,\ z(1) = 1.$

6.5. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 - 2yz]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

6.6. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + (z')^2 + 2y]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 1,\ z(0) = 0,\ y(1) = \dfrac{3}{2},\ z(1) = 1.$

6.7. $\int\limits_0^3 \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 1,\ z(0) = -2,\ y(3) = 7,\ z(3) = 1.$

6.8. $\int\limits_0^1 (y'z' + yz)\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ y(1) = e,\ z(1) = e^{-1}.$

6.9. $\int\limits_0^{\pi} [(y')^2 - (z')^2 + 2y'z' + 2y\cos x + 2z^2]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = -1,\ z(0) = 0,\ y(\pi) = \pi + 1,\ z(\pi) = 0.$

6.10. $\int\limits_0^{\pi/4} [(y')^2 + (z')^2 + 8yz + x^2 \sin x]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1,\ z\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1.$

6.11. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + (z')^2 + 2yz + xe^x]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 0,\ z(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1.$

6.12. $\int\limits_0^{\pi} [(y')^2 + (z')^2 - y^2 - z^2]\,dx \to \text{extr};$

$y(0) = 1,\ z(0) = 1,\ y(\pi) = 0,\ z(\pi) = 0.$

7. ФУНКЦИОНАЛЫ ВИДА $J(y)=\int\limits_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(n)})\,dx$

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала

$$J(y)=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x))\,dx, \tag{7.1}$$

(где $y\in C^n[a,b]$) при заданных условиях

$$y(a)=y_a,\ y'(a)=y'_a,\dots,y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)}, \tag{7.2}$$

$$y(b)=y_b,\ y'(b)=y'_b,\dots,y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)}. \tag{7.3}$$

Эту задачу мы будем называть *задачей с закрепленными концами* и будем символически записывать в виде

$$\begin{gathered}\int\limits_a^b F(x,y,y',\dots,y^{(n)})\,dx\to\mathrm{extr};\\ y(a)=y_a,\ y'(a)=y'_a,\ \dots,\ y^{(n-1)}(a)=y_a^{(n-1)},\\ y(b)=y_b,\ y'(b)=y'_b,\ \dots,\ y^{(n-1)}(b)=y_b^{(n-1)}.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Предположим, что $F(x,y_0,y_1,\dots,y_n)$ – достаточно гладкая функция, заданная на $[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}$. Вычислим первую вариацию функционала J. Положим

$$\varphi(t)=J(y+th)=\int\limits_a^b F(x,y(x)+th(x),y'(x)+th'(x),\dots,y^{(n)}(x)+th^{(n)}(x))\,dx.$$

Тогда

$$\delta J(y,h)=\varphi'(0)=\int\limits_a^b F'_y(x,y,y',\dots,y^{(n)})h\,dx+$$

$$+\int\limits_a^b F'_{y'}(x,y,y',\dots,y^{(n)})h'\,dx+\dots+\int\limits_a^b F'_{y^{(n)}}(x,y,y',\dots,y^{(n)})h^{(n)}\,dx.$$

Пусть функция $y_0\in C^{2n}[a,b]$ является решением задачи с закрепленными концами. Заметим, что для этой задачи всякая функция $h\in C_0^\infty[a,b]$ является допустимой вариацией переменной y. В силу необходимого условия экстремума имеем

$$\delta J(y_0,h)=\int\limits_a^b F'_y(x,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n)})h\,dx+\int\limits_a^b F'_{y'}(x,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n)})h'\,dx+$$

$$+\dots+\int\limits_a^b F'_{y^{(n)}}(x,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n)})h^{(n)}\,dx=0\quad\forall h\in C_0^\infty[a,b]. \tag{7.5}$$

Интегрируя по частям, приходим к тождеству:

$$\int\limits_a^b \Big[F'_y(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}}(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)})\Big] h\, dx = 0 \quad \forall h \in C_0^\infty[a, b].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k)}}(x, y_0(x), y'_0(x), \ldots, y_0^{(n)}(x)) \equiv 0.$$

Таким образом, всякая функция $y_0 \in C^{2n}[a, b]$, являющаяся решением задачи (7.4), является решением дифференциального уравнения порядка $2n$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{7.6}$$

которое называется *уравнением Эйлера* для функционала (7.1). Решения уравнения (7.6) называют *экстремалями функционала* (7.1).

Экстремали функционала (7.1), удовлетворяющие краевым условиям (7.2), (7.3), называются *экстремалями задачи* (7.4).

Рассмотрим теперь *задачу со свободными концами*, то есть задачу о поиске локального экстремума функционала (7.1) на пространстве $Y \in C^n[a, b]$ без каких-либо дополнительных условий на границе отрезка. Эту задачу мы символически будем записывать в виде

$$\int\limits_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx \to \text{extr}.$$

Пусть функция $y_0 \in C^{2n}[a, b]$ является решением задачи со свободными концами. В силу необходимого условия экстремума имеем

$$\delta J(y_0, h) = \int\limits_a^b F'_y(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) h\, dx + \int\limits_a^b F'_{y'}(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) h'\, dx +$$
$$+ \cdots + \int\limits_a^b F'_{y^{(n)}}(x, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) h^{(n)}\, dx = 0 \quad \forall h \in C^n[a, b]. \tag{7.7}$$

Взяв в этом тождестве $h \in C_0^\infty[a, b]$, получим тождество (7.5). Из него, как было показано выше, следует, что функция y_0 удовлетворяет уравнению Эйлера (7.6).

Интегрируя по частям в тождестве (7.7), получим

$$\int\limits_a^b \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})\right] h\, dx +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k+1)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) h\right]\Bigg|_a^b +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k+2)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) h'\right]\Bigg|_a^b + \ldots$$

$$\cdots + \left[F'_{y^{(n)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) h^{(n-1)}\right]\Bigg|_a^b = 0 \quad \forall h \in C^n[a,b].$$

Замечая, что первое слагаемое в левой части тождества равно нулю и пользуясь произволом в выборе значений $h(a), h'(a), \ldots, h^{(n-1)}(a)$, $h(b), h'(b), \ldots, h^{(n-1)}(b)$, замечаем, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k+1)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})\big|_{x=a,b} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k+2)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})\big|_{x=a,b} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$F'_{y^{(n)}}(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})\big|_{x=a,b} = 0.$$

Таким образом, если функция $y_0 \in C^{2n}[a,b]$ является решением задачи со свободными концами, то она является решением краевой задачи для уравнения Эйлера (7.6) с *естественными граничными условиями*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F'_{y^{(k+n-m)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\Bigg|_{x=a,b} = 0, \quad 0 \le m < n. \quad (7.8)$$

Решения задачи (7.6), (7.8) мы будем называть *экстремалями задачи со свободными концами.*

Задачи

Найти экстремали функционала

7.1. $J(y) = \int\limits_a^b [16y^2 - (y'')^2 + x^2]\, dx.$

7.2. $J(y) = \int\limits_a^b [2xy + (y''')^2]\, dx.$

Найти экстремали задачи

7.3. $$J(y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\ell}^{\ell}[\mu(y'')^2 + 2\rho y]\,dx \to extr;$$
$$y(-\ell) = 0,\ y'(-\ell) = 0,\ y(\ell) = 0,\ y'(\ell) = 0,$$
где ℓ, μ, ρ – положительные постоянные.

К рассматриваемой вариационной задаче сводится нахождение оси изогнутой упругой однородной цилиндрической балки, заделанной на концах. Функционал J выражает потенциальную энергию балки.

7.4. $\int\limits_0^1[(y'')^2+1]\,dx \to extr;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1.$

7.5. $$\int\limits_0^{\pi/2}[(y'')^2 - y^2 + x^2]\,dx \to extr;$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

7.6. $\int\limits_0^1(y'')^2\,dx \to \text{extr};\quad y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=0.$

7.7. $\int\limits_0^1[(y'')^2-48y]\,dx \to \text{extr};\ y(0)=0,\ y'(0)=-4,\ y(1)=0,\ y'(1)=0.$

7.8. $\int\limits_0^1[(y'')^2-24xy]\,dx \to \text{extr};\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{5},\ y'(1)=1.$

7.9. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2-y^2]\,dx \to \text{extr};\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(\pi)=\operatorname{sh}\pi,\ y'(\pi)=\operatorname{ch}\pi.$

7.10. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2-(y')^2]\,dx \to \text{extr};\ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y(\pi)=\pi-1,\ y'(\pi)=1.$

7.11. $$\int\limits_0^1[(y'')^2 + (y')^2]\,dx \to \text{extr};$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y(1) = \operatorname{ch}1, y'(1) = \operatorname{sh}1.$$

7.12. $$\int\limits_0^1(y''')^2\,dx \to \text{extr};$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3,\ y''(1) = 6.$$

7.13. $$\int\limits_a^b[(y')^2 + yy'']\,dx \to \text{extr};$$
$$y(a) = y_a,\ y'(a) = y'_a,\ y(b) = y_b,\ y'(b) = y'_b.$$

7.14. $$\int\limits_0^{\pi}[y^2 + y' + xy'']\,dx \to \text{extr};$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = 1.$$

7.15. $\int\limits_1^2[y^2+y'']\,dx \to \text{extr};\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1.$

8. МИНИМИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Пусть Y – линейное пространство. Множество $M \subset Y$ называется *выпуклым*, если

$$\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in M \quad \forall y_1, y_2 \in M, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Функционал J, определенный на выпуклом множестве M, называется *выпуклым*, если

$$J(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \le \alpha J(y_1) + (1-\alpha)J(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in M, \ \ \forall \alpha \in [0,1]$$

и называется *строго выпуклым*, если

$$J(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2) < \alpha J(y_1)+(1-\alpha)J(y_2)\ \forall y_1, y_2 \in M,\ y_1 \ne y_2,\ \forall \alpha \in (0,1).$$

Теорема 8.1. *Всякая точка локального минимума выпуклого функционала является точкой его глобального минимума.*

Теорема 8.2. *Если строго выпуклый функционал имеет точку минимума, то она единственна.*

Теорема 8.3. *Пусть выпуклый функционал J имеет в точке $y_0 \in M$ первую вариацию $\delta J(y_0, h)$. Тогда справедливо неравенство*

$$J(y) \ge J(y_0) + \delta J(y_0, y - y_0) \quad \forall y \in M.$$

Теорема 8.4. *Пусть выпуклый функционал J имеет в точке $y_0 \in M \subset Y$ первую вариацию. Пусть*

$$\delta J(y_0, h) = 0 \text{ для всех } h \in Y \text{ таких, что } y_0 + h \in M.$$

Тогда y_0 является точкой глобального минимума функционала J на множестве M.

Следствие 8.1. *Пусть J – выпуклый функционал, имеющий первую вариацию. Точка y_0 является точкой минимума функционала J тогда и только тогда, когда y_0 является стационарной точкой этого функционала, то есть*

$$\delta J(y_0, h) = 0 \quad \forall h \in Y.$$

8.1. Случай квадратичного функционала.

Пусть квадратичный функционал

$$J(y) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [p(x)(y'(x))^2 + q(x)y^2(x)]\,dx - \int\limits_a^b f(x)y(x)\,dx \tag{8.1}$$

минимизируется на пространстве $Y = C^1[a,b]$. Пусть $p, q, f \in C[a,b]$, причем $p(x) \ge p_0 > 0$ и $q(x) \ge 0$.

Заметим, что функционал (8.1) – выпуклый.

Для этого функционала условие (см. пример 3.1)

$$\delta J(y_0,h)=\int\limits_a^b[py_0'h'+qy_0h]\,dx-\int\limits_a^b fh\,dx=0\quad\forall h\in C^1[a,b]$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $y_0\in C^1[a,b]$ являлась точкой его глобального минимума.

Таким образом, решения краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=f,$$
$$y'(a)=0,\quad y'(b)=0$$

и только они дают глобальный минимум функционалу (8.1).

В задаче с закрепленными концами этим свойством обладают решения краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy=f,$$
$$y(a)=y_a,\quad y(b)=y_b.$$

8.2. Случай выпуклой функции F.

Пусть функция $F(x,y,z)$ является выпуклой по паре аргументов (y,z), то есть

$$F(x,\alpha y_1+(1-\alpha)y_2,\alpha z_1+(1-\alpha)z_2)\le\alpha F(x,y_1,z_1)+(1-\alpha)F(x,y_2,z_2)$$
$$\forall(y_1,z_1),(y_2,z_2)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\alpha\in[0,1].$$

Заметим, что достаточным условием выпуклости функции F по паре аргументов (y,z) является выполнение неравенств

$$F''_{yy}>0,\quad F''_{yy}F''_{zz}-(F''_{yz})^2>0.$$

Теорема 8.5. *Пусть функция $F(x,y,z)$ выпукла по паре аргументов (y,z). Тогда простейший функционал вариационного исчисления*

$$J(y)=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$$

является выпуклым.

Задачи

8.1. Показать, что функционал $J(y)=\int\limits_a^b(y')^2\,dx$, определенный на $Y=C^1[a,b]$, является выпуклым, но не является строго выпуклым.

Показать, что тот же функционал, определенный на $Y = \overset{0}{C}{}^1[a,b]$, является строго выпуклым.

8.2. Показать, что функционал $J(y) = \int\limits_a^b [|y'|+|y|]\,dx$, определенный на $C^1[a,b]$, является выпуклым.

8.3. Является ли выпуклым функционал $J(y) = \int\limits_a^b [(y')^2 - 2yy']\,dx$, определенный на $C^1[a,b]$?

8.4. Является ли выпуклым функционал $J(y) = \int\limits_a^b (y')^3\,dx$, определенный на $C^1[a,b]$?

Найти экстремаль вариационной задачи. Доказать, что функционал выпуклый, и поэтому на найденной экстремали реализуется минимум функционала.

8.5. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 10x^4y' + 12xy]\,dx \to \min; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

8.6. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx \to \min; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 2.$

8.7. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{x}\,dx \to \min; \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1.$

8.8. $\int\limits_1^2 x(y')^2\,dx \to \min; \quad y(1) = 0,\ y(2) = \ln 2.$

8.9. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{(y')^4}{x^3}\,dx \to \min; \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 4.$

8.10. $\int\limits_0^1 [(y')^6 - 6x^5y']\,dx \to \min; \quad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

8.11. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx + y^2(1) \to \min; \quad y(0) = 2.$

8.12. $\int\limits_1^2 x^2(y')^2\,dx - 4y(1) \to \min; \quad y(2) = 0.$

8.13. $\int\limits_0^1 [(y'')^2 - 24xy]\,dx \to \min; \quad y(0) = \dfrac{7}{30},\ y(1) = 0.$

8.14. $\int\limits_0^1 [(y'')^2 - 48y]\,dx \to \min;\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=0,\ y'(1)=2.$

8.15. $\int\limits_0^1 [(y'')^2 + (y')^2]\,dx \to \min;$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$

8.16. $\int\limits_0^1 (y''')^2\,dx \to \min;$

$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 4.$

9. ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА В ТЕРМИНАХ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ. УСЛОВИЕ ЛЕЖАНДРА

Пусть функционал J определен в некоторой окрестности точки y_0 Если для всех $h \in Y$ существует величина

$$\delta^2 J(y_0, h) = \frac{d^2}{dt^2} J(y_0 + th)|_{t=0}$$

то она называется *второй вариацией* функционала J в точке y_0.

Теорема 9.1. *Пусть функционал J имеет в точке y_0 локальный минимум. Если в этой точке существует вторая вариация $\delta^2 J(y_0, h)$, то она неотрицательна для всех допустимых h.*

Следствие 9.1. *Пусть функционал J имеет в точке y_0 локальный максимум. Если в этой точке существует вторая вариация $\delta^2 J(y_0, h)$, то она неположительна для всех допустимых h.*

Если функция F дважды непрерывно дифференцируема, то простейший функционал вариационного исчисления

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{9.1}$$

имеет вторую вариацию, причем

$$\delta^2 J(y, h) = \int\limits_a^b [F''_{y'y'}(x, y, y')(h')^2 + 2F''_{yy'}(x, y, y')hh' + F''_{yy}(x, y, y')h^2]\,dx.$$

Теорема 9.2. *Если функция y_0 является точкой локального минимума функционала (9.1), то она удовлетворяет условию Лежандра*

$$F''_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]. \tag{9.2}$$

Следствие 9.2. *Если функция y_0 является точкой локального максимума функционала (9.1), то она удовлетворяет условию*

$$F''_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Задачи

Вычислить вторую вариацию $\delta^2 J(y,h)$ функционала

9.1. $J(y) = \int\limits_a^b [(y')^3 + \sin^2 x]\,dx.$

9.2. $J(y) = \int\limits_a^b [2e^x y - (y')^2]\,dx.$

9.3. $J(y) = \int\limits_a^b [y^2 - (y')^2]\,dx.$

9.4. Обосновать справедливость следствия 9.1.

9.5. Обосновать справедливость следствия 9.2.

9.6. Найти вторую вариацию функционала Больца (5.1) в предположении, что терминальная функция g достаточно гладкая.

9.7. Найти вторую вариацию функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x,y,y'')\,dx.$

Найти экстремаль вариационной задачи. Проверить, выполнено ли для нее условие Лежандра.

9.8. $J(y) = \int\limits_{-1}^1 [x^2(y')^2 + 12y^2]\,dx \to \min; \quad y(-1) = -1,\ y(1) = 1.$

9.9. $J(y) = \int\limits_0^1 [y(y')^3 - (y')^2]\,dx \to \min; \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

9.10. $J(y) = \displaystyle\int\limits_2^3 \frac{x^3}{(y')^2}\,dx \to \min; \quad y(2) = 4,\ y(3) = 9.$

9.11. $J(y) = \int\limits_1^2 [2y(y')^3 - x(y')^4]\,dx \to \min; \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1.$

Показать, что для данной вариационной задачи не выполнено условие Лежандра, и поэтому она не имеет решения.

9.12. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{y}{(y')^2}\,dx \to \min; \quad y(1) = -1,\ y(2) = -4.$

9.13. $\displaystyle\int\limits_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}\,dx \to \min; \quad y(0) = -1,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

9.14. $\int\limits_{-1}^1 [xy' + (y')^2]\,dx \to \max; \quad y(-1) = 0,\ y(1) = 0.$

10. КЛАССИЧЕСКИЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

Приведем достаточные условия существования решения простейшей задачи вариационного исчисления

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \to \min; \quad y(a) = y_a,\ y(b) = y_b. \tag{10.1}$$

Функцию F будем считать достаточно гладкой, например, – трижды непрерывно дифференцируемой.

Рассмотрим экстремаль задачи (10.1) – функцию y_0, являющуюся решением краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y') + F'_y(x, y, y') = 0, \tag{10.2}$$

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{10.3}$$

Будем предполагать, что выполнено *усиленное условие Лежандра*

$$P(x) \equiv F''_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a, b]. \tag{10.4}$$

Положим $Q(x) = F''_{yy}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \dfrac{d}{dx}F''_{yy'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ и введем в рассмотрение *уравнение Якоби*

$$-\frac{d}{dx}\left(P\frac{du}{dx}\right) + Qu = 0. \tag{10.5}$$

Пусть u_0 – решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условию $u_0(a) = 0$, $u_0'(a) = 1$. Точка $x_* > a$ называется *сопряженной* к точке a, если $u_0(x_*) = 0$ и $u_0(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, x_*)$. Говорят, что выполнено *усиленное условие Якоби*, если на полуинтервале $(a, b]$ нет сопряженных с a точек.

Усиленное условие Якоби можно эквивалентным образом переформулировать так: краевая задача

$$-\frac{d}{dx}\left(P\frac{du}{dx}\right) + Qu = 0, \quad x \in (a, x_*), \tag{10.6}$$

$$u(a) = 0, \quad u(x_*) = 0 \tag{10.7}$$

при всех $x_* \in (a, b]$ имеет только тривиальное решение.

Замечание 10.1. *Если $P(x) > 0$ и $Q(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то в силу принципа максимума задача (10.6), (10.7) имеет только тривиальное решение. Поэтому в этом случае усиленное условие Якоби выполнено.*

Теорема 10.1. *Пусть функция $y_0 \in C^1[a,b]$ является экстремалью задачи (10.1). Пусть также выполнены усиленное условие Лежандра (10.4) и усиленное условие Якоби. Тогда y_0 является точкой локального минимума задачи (10.1).*

Замечание 10.2. *Аналогичным образом функция $y_0 \in C^1[a,b]$ является точкой локального максимума задачи*

$$\int\limits_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx \to \max; \quad y(a) = y_a, \ y(b) = y_b,$$

если она является экстремалью этой задачи, выполнены условие

$$P(x) \equiv F''_{y'y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) < 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

и усиленное условие Якоби.

Пример 10.1. Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^b [(y')^2 - y^2]\, dx + \int\limits_0^b (2 + x^2) y\, dx$$

при условиях $y(0) = 0, \ y(b) = b^2$, где $0 < b$ – параметр.

Экстремаль $y_0 = x^2$ является решением задачи

$$-y'' - y + 2 + x^2 = 0,$$

$$y(0) = 0, \ y(b) = b^2.$$

В данном случае $F''_{y'y'} = 1$, $F''_{yy'} = 0$, $F''_{yy} = -1$, и уравнение Якоби принимает вид

$$u'' + u = 0.$$

Решением уравнения Якоби, удовлетворяющим условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$, является функция $u_0(x) = \sin x$. Поэтому усиленное условие Якоби выполнено, если $b < \pi$ и не выполнено, если $b \geq \pi$.

При $b < \pi$ выполнены все условия теоремы 10.1, и поэтому экстремаль $y_0(x) = x^2$ будет давать точку локального минимума.

Пусть теперь $b > \pi$. Возьмем допустимое приращение вида $h(x) = c \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$. Тогда

$$J(y_0 + h) - J(y_0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^b [(h')^2 - h^2]\, dx =$$

$$= c^2 \int\limits_0^b \left[\frac{\pi^2}{b^2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right)\right] dx = \frac{c^2 b}{2}\left(\frac{\pi^2}{b^2} - 1\right) < 0$$

для сколь угодно малых c. Следовательно экстремаль $y_0 = x^2$ при $b > \pi$ не является точкой локального минимума.

Задачи

Найти экстремаль задачи и доказать, что она дает решение.

10.1. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + x^2]\,dx \to \min; \quad y(0) = -1,\ y(1) = 1.$

10.2. $\int\limits_0^2 [(y')^2 + xy']\,dx \to \min; \quad y(0) = 1,\ y(2) = 0.$

10.3. $\int\limits_0^1 y(y')^2\,dx \to \min; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 1.$

10.4. $\displaystyle\int\limits_0^2 \frac{dx}{y'}\,dx \to \min; \quad y(0) = 0,\ y(2) = 1.$

10.5. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{x^3}{(y')^2}\,dx \to \min; \quad y(1) = 1,\ y(2) = 4.$

10.6. $\int\limits_1^2 [x(y')^4 - 2y(y')^3]\,dx \to \min; \quad y(1) = 0,\ y(2) = 1.$

Исследовать задачу.

10.7. $\int\limits_{-1}^2 y'(1 + x^2y')\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(-1) = 1,\ y(2) = 4.$

10.8. $\int\limits_1^2 y'(1 + x^2y')\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(1) = 3,\ y(2) = 5.$

10.9. $\int\limits_1^2 [x^2(y')^2 + 12y^2]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(1) = 1,\ y(2) = 8.$

10.10. $\int\limits_0^{\pi/4} [y^2 - (y')^2 + 6y\sin 2x]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

10.11. $\int\limits_{-1}^{\pi/4} [4y^2 - (y')^2 + 8y]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = -1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0.$

10.12. $\int\limits_0^2 [6(y')^2 - (y')^4 + yy']\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0) = 0,\ y(2) = 3.$

10.13. $\int\limits_0^1 [(y')^2 - (y')^3]\,dx \to \min; \quad y(0) = -1,\ y(1) = a.$

Здесь a – параметр.

10.14. $\int\limits_0^a ((y')^2 + 2yy' - 16y^2)\,dx \to \min; \quad y(0) = 0,\ y(a) = 0.$

Здесь $0 < a$ – параметр.

11. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

11.1. Абстрактная изопериметрическая задача

Пусть $J(y)$ и $\Psi_1(y), \Psi_2(y), \ldots \Psi_n(y)$ – дифференцируемые функционалы, заданные на линейном нормированном пространстве Y. Пусть вариации $\delta\Psi_1(y,h), \delta\Psi_2(y,h), \ldots, \delta\Psi_n(y,h)$ непрерывны по y.

Рассмотрим следующую задачу на условный экстремум: найти экстремум функционала $J(y)$ при условиях

$$\Psi_1(y) = c_1, \Psi_2(y) = c_2, \ldots, \Psi_n(y) = c_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – постоянные.

Эта задача, которую мы будем называть *абстрактной изопериметрической задачей*, является частным случаем задачи на условный экстремум (1.4) в случае, когда множество M задается следующим образом:

$$M = \{y \in Y \mid \Psi_1(y) = c_1, \Psi_2(y) = c_2, \ldots, \Psi_n(y) = c_n\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11.1. *Пусть $y_0 \in Y$ является точкой локального экстремума абстрактной изопериметрической задачи, но не является стационарной точкой ни одного из функционалов $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$.*

Тогда y_0 является стационарной точкой функционала Лагранжа

$$L(y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = J(y) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi_k(y)$$

при некотором выборе постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Другими словами, если y_0 является решением абстрактной изопериметрической задачи, то либо

$$\delta\Psi_k(y_0, h) = 0 \quad \forall h \in Y$$

для некоторого k, либо существует набор постоянных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (которые называют *множителями Лагранжа*) таких, что

$$\delta J(y_0, h) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \delta\Psi_k(y_0, h) = 0 \quad \forall h \in Y.$$

11.2. Классическая изопериметрическая задача

Рассмотрим теперь классическую изопериметрическую задачу – задачу поиска экстремума функционала $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx$ при условиях

$$\Psi_k(y) = \int\limits_a^b G_k(x, y, y')\,dx = c_k, \quad 1 \le k \le n.$$

Согласно теореме 11.1 нужно составить функционал Лагранжа

$$L(y, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int\limits_a^b \left[F(x, y, y') + \sum_{k=1}^n \lambda_k G_k(x, y, y')\right] dx$$

и искать точку экстремума y_0 среди решений уравнения Эйлера для функционала Лагранжа

$$-\frac{d}{dx}[F'_{y'} + \sum_{k=1}^n \lambda_k G'_{ky'}] + F'_y + \sum_{k=1}^n \lambda_k G'_{ky} = 0$$

или среди решений уравнения Эйлера для одного из функционалов Ψ_k:

$$-\frac{d}{dx} G'_{ky'} + G'_{ky} = 0.$$

Пример 11.1. (Задача Дидоны.) Решим следующую задачу: найти функцию $y \in C^1[a, b]$, удовлетворяющую граничным условиям $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, график которой имеет заданную длину $\ell > b - a$ и вместе с отрезком $a \le x \le b$ ограничивает фигуру наибольшей площади.

Таким образом, требуется найти точку максимума функционала

$$J(y) = \int\limits_a^b y(x)\,dx$$

при изопериметрическом условии

$$\Psi(y) \equiv \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \ell.$$

Заметим, что искомая функция не является стационарной точкой функционала Ψ, так как для него решением уравнения Эйлера при условиях $y(a) = y(b) = 0$ является $y(x) \equiv 0$. Длина дуги здесь $b - a < \ell$. Следовательно y – стационарная точка функционала Лагранжа

$$L(y, \lambda) = \int\limits_a^b (y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2})\,dx.$$

Составим для него уравнение Эйлера

$$-\lambda\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}+1=0.$$

Откуда

$$\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=x-C \Leftrightarrow \frac{(y')^2}{1+(y')^2}=\frac{(x-C)^2}{\lambda^2},$$

$$y'=\pm\frac{x-C}{\sqrt{\lambda^2-(x-C)^2}} \Rightarrow y=\sqrt{\lambda^2-(x-C)^2}+C_1$$

Ясно, что график решения

$$y=\sqrt{\lambda^2-(x-C)^2}+C_1$$

представляет собой дугу окружности радиуса λ с центром в точке (C, C_1). Условия

$$y(a)=0, \quad y(b)=0, \quad \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx=\ell$$

позволяют определить постоянные $C=(a+b)/2$, C_1 и множитель λ.

Задачи

Найти экстремали изопериметрической задачи

11.1. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y\,dx=0,\ y(0)=1,\ y(1)=0.$

11.2. $\int\limits_{-1}^1 y'(1+e^x y')\,dx \to extr;\quad \int\limits_{-1}^1 y'\,dx=2,\ y(-1)=1,\ y(1)=0.$

11.3. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y\,dx=3,\ y(0)=0,\ y(1)=6.$

11.4. $\int\limits_e^{e^2} y'(1+xy')\,dx \to extr;\quad \int\limits_e^{e^2} \left(y'-\frac{1}{x}\right)dx=1,\ y(e)=2,\ y(e^2)=0.$

11.5. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y\,dx=-1,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

11.6. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2-y^2]\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^{\pi/2} y\sin x\,dx=1,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

11.7. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 xy\,dx=0,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$

11.8. $\int\limits_0^{\pi} (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^{\pi} y\sin x\,dx=0,\ y(0)=1,\ y(\pi)=1.$

11.9. $\int\limits_0^\pi (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^\pi y\cos x\,dx = \dfrac{\pi}{2},\ y(0)=1,\ y(\pi)=-1.$

11.10. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y^2\,dx = 1,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

11.11. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + x^2]\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y^2\,dx = 2,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

11.12. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 [y-(y')^2]\,dx = \dfrac{1}{12},\ y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{1}{4}.$

11.13. $\int\limits_0^\pi y\sin x\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^\pi (y')^2\,dx = \dfrac{3\pi}{2},\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi.$

11.14. $\int\limits_1^2 x^2(y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_1^2 xy\,dx = \dfrac{7}{3},\ y(1)=1,\ y(2)=2.$

11.15. $\int\limits_0^1 [(y')^2+y^2]\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 ye^x\,dx = \dfrac{e^2+1}{4},\ y(0)=0,\ y(1)=e.$

11.16. $\int\limits_0^\pi (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^\pi y\cos x\,dx = \dfrac{\pi}{2},\ \int\limits_0^\pi y\sin x\,dx = \pi+2,$
$y(0)=2,\ y(\pi)=0.$

11.17. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\quad \int\limits_0^1 y\,dx = -\dfrac{3}{2},\ \int\limits_0^1 xy\,dx = -2,$
$y(0)=2,\ y(1)=-14.$

12. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ С ГОЛОНОМНЫМИ И НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

12.1. Голономные связи.

Рассмотрим задачу о поиске экстремума функционала

$$J(\vec{y}) = \int_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx, \tag{12.1}$$

при дополнительных условиях (связях)

$$\varphi_i(x, \vec{y}(x)) = 0, \quad 1 \le i \le m, \quad \text{где} \quad m < n. \tag{12.2}$$

Связи вида (12.2) принято называть *голономными (конечными)*.

Функции $\varphi_i(x, \vec{y}) = \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, задающие условия (12.2), предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми и независимыми по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Последнее означает, что в каждой точке $(x, \vec{y})$ хотя бы один из якобианов порядка m

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_m})} = \begin{vmatrix} \varphi'_{1y_{j_1}}(x, \vec{y}) & \varphi'_{1y_{j_2}}(x, \vec{y}) & \ldots & \varphi'_{1y_{j_m}}(x, \vec{y}) \\ \varphi'_{2y_{j_1}}(x, \vec{y}) & \varphi'_{2y_{j_2}}(x, \vec{y}) & \ldots & \varphi'_{2y_{j_m}}(x, \vec{y}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi'_{my_{j_1}}(x, \vec{y}) & \varphi'_{my_{j_2}}(x, \vec{y}) & \ldots & \varphi'_{my_{j_m}}(x, \vec{y}) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Формальная схема вывода необходимых условий экстремума состоит в следующем. Рассмотрим функционал Лагранжа

$$L(\vec{y}, \vec{\lambda}) = \int_a^b [F(x, \vec{y}, \vec{y}\,') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i(x, \vec{y})]\,dx.$$

Запишем для него необходимое условие экстремума

$$-\frac{d}{dx}F'_{y'_j}(x, \vec{y}, \vec{y}\,') + F'_{y_j}(x, \vec{y}, \vec{y}\,') + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi'_{iy_j}(x, \vec{y}) = 0, \ j = 1, \ldots, n; \tag{12.4}$$

$$\varphi_i(x, \vec{y}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{12.5}$$

Теорема 12.1. *Пусть вектор-функция $\vec{y}_0 \in C^1[a, b]$ является решением задачи на условный экстремум для функционала (12.1) при наличии независимых связей (12.2). Тогда $\vec{y}_0$ удовлетворяет при соответствующем выборе множителей $\vec{\lambda}(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_m(x))$ уравнениям Эйлера (12.4) и условиям (12.5).*

12.2. Задача о геодезических линиях. Пусть требуется найти кривую наименьшей длины, лежащую на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ и соединяющую точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$, которая называется *геодезической линией.*

Зададим произвольную кривую, соединяющую точки A и B параметрически вектором координат $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $t \in [0, 1]$. Длина кривой задается функционалом

$$J(x, y, z) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \tag{12.6}$$

Таким образом, требуется решить вариационную задачу о минимизации функционала (12.6) при условиях

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0, \tag{12.6}$$

$$x(0) = x_0,\ y(0) = y_0,\ z(0) = z_0,\ x(1) = x_1,\ y(1) = y_1,\ z(1) = z_1.$$

Заметим, что условие связи (12.6) является голономным.

Составим функционал Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = \int_0^1 \left[\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(t)\varphi(x, y, z)\right] dt.$$

Запишем для него систему уравнений Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} + \lambda(t)\,\varphi'_x(x, y, z) = 0,$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} + \lambda(t)\,\varphi'_y(x, y, z) = 0,$$
$$-\frac{d}{dt}\frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} + \lambda(t)\,\varphi'_z(x, y, z) = 0.$$

Используем теперь в качестве параметра t длину дуги кривой от точки A до текущей точки (этот параметр принято называть натуральным). В этом случае

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$$

и система уравнений принимает более простой вид

$$\begin{aligned} -x'' + \lambda(t)\varphi'_x(x, y, z) = 0,\\ -y'' + \lambda(t)\varphi'_y(x, y, z) = 0,\\ -z'' + \lambda(t)\varphi'_z(x, y, z) = 0. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Пример 12.1. Найдем геодезические на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

В этом случае уравнения (12.7) принимают вид

$$-x'' + 2\lambda(t)x = 0,$$
$$-y'' + 2\lambda(t)y = 0,$$
$$-z'' + 2\lambda(t)z = 0.$$

Умножим уравнения на x, y и z соответственно и сложим результаты. Учитывая, что

$$-(x''x + y''y + z''z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)'' + ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) = 1,$$

имеем

$$1 + 2\lambda R^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2R^2}.$$

Решая теперь уравнения

$$x'' + R^{-2}x = 0,$$
$$y'' + R^{-2}y = 0,$$
$$z'' + R^{-2}z = 0,$$

находим

$$x(t) = a_1 \cos(t/R) + b_1 \sin(t/R),$$
$$y(t) = a_2 \cos(t/R) + b_2 \sin(t/R),$$
$$y(t) = a_3 \cos(t/R) + b_3 \sin(t/R).$$

Эти уравнения можно переписать в векторной форме

$$\vec{r}(t) = \vec{a} \cos(t/R) + \vec{b} \sin(t/R).$$

Подставляя эти соотношения в уравнение сферы, получаем

$$|\vec{a}|^2 \cos^2(t/R) + (\vec{a}, \vec{b}) \sin(2t/R) + |\vec{b}|^2 \sin^2(t/R) \equiv R^2.$$

Из этого тождества следует, что

$$|\vec{a}| = R, \quad |\vec{b}| = R, \ (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Искомая кривая представляет собой дугу окружности, которая лежит в плоскости, натянутой на векторы $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{b}$. Эти векторы имеют длину, равную R и ортогональны.

12.2. Неголономные связи.

Пусть рассматривается задача о поиске экстремума функционала

$$J(\vec{y}) = \int\limits_a^b F(x, \vec{y}, \vec{y}\,')\,dx$$

при дополнительных условиях (связях), которые являются дифференциальными уравнениями

$$\varphi_i(x, \vec{y}(x), \vec{y}\,'(x)) = 0, \quad 1 \le i \le m, \quad \text{где} \quad m < n. \tag{12.8}$$

Связи вида (12.8) принято называть *неголономными*.

В этом случае также можно применять правило множителей Лагранжа. Функционал Лагранжа имеет вид

$$L(\vec{y}, \vec{\lambda}) = \int\limits_a^b [F(x, \vec{y}, \vec{y}\,') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)\varphi_i(x, \vec{y}, \vec{y}\,')]\,dx.$$

Задачи

12.1. Найти кратчайшее расстояние между точками $A(1, 0, -1)$ и $B(0, -1, 1)$, лежащими на поверхности $x + y + z = 0$.

12.2. Найти геодезические линии круглого цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

12.3. Найти экстремаль вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2]\,dx \to extr; \quad y_1 - y_2 - 2\operatorname{sh} x = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(1) = e^{-1}.$$

Доказать, что на ней реализуется минимум функционала.

12.4. Для вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]\,dx \to extr; \quad y_1 - 2y_2 + 3x = 0,$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 2$$

найти экстремаль и проверить, является ли она точкой экстремума.

12.5. Для вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1'y_2]\,dx \to extr; \quad y_1 - y_2 - e^x = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2e, \quad y_2(1) = e$$

найти экстремаль и проверить, является ли она точкой экстремума.

12.6. Доказать отсутствие решений вариационной задачи

$$\int\limits_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2]\, dx \to \min; \quad y_1 + y_2 - 2\cos x = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

12.7. Найти экстремаль вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]\, dx \to extr; \quad y_1' - y_2 = 0,$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2\,\mathrm{ch}\,1, \quad y_2(1) = 2\,\mathrm{sh}\,1.$$

12.8. Найти экстремаль вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [(y_1')^2 + x^2 y_2']\, dx \to extr; \quad y_1' + y_2 = 0,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = -\frac{1}{2}, \quad y_2(1) = 1.$$

12.9. Найти экстремаль вариационной задачи

$$\int\limits_0^1 [2(y_1')^2 + (y_2')^2 + y_1^2]\, dx \to extr; \quad y_1' - y_2 = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 2\,\mathrm{ch}1, \quad y_2(1) = e + 2\,\mathrm{sh}\,1.$$

12.10. Доказать отсутствие решений вариационной задачи

$$\int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1 y_2]\, dx \to \max; \quad y_1' + y_2' - 4x = 0,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1.$$

13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Найти экстремали задачи

13.1. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr; \quad y(0) = 1.$

13.2. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr; \quad y(1) = 1.$

13.3. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + y']\,dx \to extr; \quad y(1) = 0.$

13.4. $\int\limits_0^{\pi/4} [(y')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 1.$

13.5. $\int\limits_0^{\pi/4} [(y')^2 - y^2 + 4y\cos x]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0.$

13.6. $\int\limits_0^b [(y')^2 + y]\,dx \to extr; \quad y(0) = 1.$

13.7. $\int\limits_0^b [(y')^2 + y]\,dx \to extr; \quad y(b) = b.$

13.8. $\int\limits_0^b [(y')^2 + y + 2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0.$

13.9. $\int\limits_0^1 (y'')^2\,dx \to extr; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

13.10. $\int\limits_0^1 (y'')^2\,dx \to extr; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

13.11. $\int\limits_0^1 [(y'')^2 - 48y]\,dx \to extr; \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$

13.12. $\int\limits_0^1 [(y'')^2 + 48y]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

13.13. $\int\limits_1^e x(y'')^2\,dx \to extr; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y'(e) = 2.$

13.14. $\int\limits_1^e x^3(y'')^2\,dx \to extr; \quad y(1) = \dfrac{e}{2}, \quad y(e) = \dfrac{3}{2}, \quad y'(e) = \dfrac{1}{2e}.$

13.15. $\int\limits_0^\pi [(y'')^2 + 4y^2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = \operatorname{sh}\pi.$

13.16. $\int\limits_0^{\pi/2} [(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

13.17. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 1.$

13.18. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y'(0) = 1.$

13.19. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y'(\pi) = 1.$

13.20. $\int\limits_0^{\pi/2}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

13.21. $\int\limits_0^{\pi/2}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

13.22. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1.$

13.23. $\int\limits_0^{\pi}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr; \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$

13.24. $\int\limits_0^{b}[(y'')^2 - y^2]\,dx \to extr.$

13.25. $\int\limits_0^{1}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1} y\,dx = 1.$

13.26. $\int\limits_0^{1}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1} xy\,dx = 1, \quad y(0) = 0.$

13.27. $\int\limits_0^{\pi}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{\pi} y\sin x\,dx = 1, \quad y(0) = 0.$

13.28. $\int\limits_0^{1}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1} ye^x\,dx = 1, \quad y(0) = 0.$

13.29. $\int\limits_0^{1}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1} y^2\,dx = 1, \quad \int\limits_0^{1} y\,dx = 0.$

13.30. $\int\limits_0^{1} y\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1}(y'')^2\,dx = 1, \; y(0) = 0, \; y(1) = 0, \; y'(0) = 0.$

13.31. $\int\limits_0^{1}(y'')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{1} y\,dx = 1, \quad y(0) = 0.$

13.32. $\int\limits_0^{b}(y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^{b} y\,dx = \frac{1}{3}, \quad y(b) = 1.$

Найти экстремали задачи

13.33. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to \text{extr}; \quad y(0)=1,\ y(1)=0.$

13.34. $\int\limits_2^3 (x^2-1)(y')^2\,dx \to \text{extr}; \quad y(2)=0,\ y(3)=1.$

13.35. $\int\limits_0^1 [(y')^2+yy'+12xy]\,dx \to \text{extr}; \quad y(0)=0,\ y(1)=0.$

13.36. $\int\limits_{-1}^1 [(y')^2+y^2]\,dx \to \text{extr}; \quad y(-1)=1,\ y(1)=1.$

13.37. $\int\limits_0^1 [(y')^2+y^2+4y\,\mathrm{sh}\,x]\,dx \to \text{extr}; \quad y(0)=-1,\ y(1)=0.$

13.38. $$\int\limits_0^1 \left[y^2+(y')^2+\frac{2y}{\mathrm{ch}x}\right]\,dx \to \text{extr}.$$

Доказать, что вариационная задача не имеет решения.

13.39. $\int\limits_0^1 (y_1'y_2'+2y_1+4y_2)\,dx \to extr;$

$y_1(0)=-1,\ y_2(0)=3,\ y_1(1)=2,\ y_2(1)=3.$

13.40. $\int\limits_0^1 [(y_1')^2+(y_2')^2-2y_1y_2]\,dx \to \max;$

$y_1(0)=1,\ y_2(0)=-1,\ y_1(1)=e,\ y_2(1)=-e.$

Найти экстремали функционала

13.41. $J(y)=\int\limits_a^b [(y'')^2-2(y')^2+y^2-2y\sin x)\,dx.$

13.42. $J(y)=\int\limits_a^b [(y''')^2+(y)^2-2yx^3]\,dx.$

Найти экстремали задачи.

13.43. $\int\limits_0^\pi [(y'')^2+4y^2]\,dx \to \text{extr};$

$y(0)=-1,\ y'(0)=0,\ y(\pi)=\mathrm{ch},\pi,\ y'(1)=\mathrm{sh}\,\pi.$

13.44. $\int\limits_0^1 e^{-x}(y'')^2\,dx \to \text{extr};$

$y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

13.45. $\int\limits_1^e (x+1)x(y'')^2\,dx \to \text{extr};$

$y(1)=0,\ y'(1)=1,\ y(e)=e,\ y'(e)=2.$

13.46. $\int\limits_0^1 (y'')^n\,dx \to \text{extr};\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=1.$ Здесь n – натуральный параметр.

13.47. Найти вторую вариацию функционала (6.1).

Найти решение задачи

13.48. $\int\limits_0^1 [(y')^3+3y^2y']\,dx \to \min;\quad y(0)=0,\ y(1)=2.$

13.49. $\int\limits_{-1}^1 [(y')^3+(y')^2]\,dx \to \min;\quad y(-1)=-1,\ y(1)=3.$

13.50. $\int\limits_0^1 [-(y')^4+6(y')^2+(x^2-4y^3)y'+2xy]\,dx \to \min;$

$y(0)=0,\ y(3)=3.$

13.51. $\int\limits_0^{\pi/6} [9y^2+2yy'-(y')^2]\,dx \to \min;\quad y(0)=1,\ y(\pi/6)=0.$

13.52. $\int\limits_0^{3\pi/2} [(y')^2)-y^2-2y]\,dx \to \min;\quad y(0)=0,\ y(3\pi/2)=0.$

13.53. $\int\limits_1^2 [3(y')^4)-2y(y')^3]\,dx \to \min;\quad y(1)=0,\ y(2)=1.$

Исследовать задачу.

13.54. $\int\limits_0^2 [xy'+(y')^2]\,dx \to \min;\quad y(0)=1,\ y(2)=0.$

13.55. $\int\limits_{-1}^2 y'(1+x^2y')\,dx \to \min;\quad y(-1)=1,\ y(2)=1.$

13.56. $\int\limits_0^1 [(y')^2+y^2+2ye^{2x}]\,dx \to \min;\quad y(0)=\dfrac{1}{3},\ y(1)=\dfrac{1}{3}e^2.$

13.57. $\displaystyle\int\limits_0^a \frac{dx}{y'}\,dx \to \min;\quad y(0)=0,\ y(a)=b.$

Здесь $0<a$, $0<b$ – параметры.

13.58. $\int\limits_0^a \dfrac{dx}{(y')^2}\,dx \to \min; \quad y(0)=0,\ y(a)=b.$

Здесь $0 < a$, $0 < b$ – параметры.

13.59. $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(y')^2}\,dx \to \min; y(1)=1, y(2)=4.$

13.60. $\int\limits_1^3 [12xy + (y')^2]\,dx \to \min; \quad y(1)=0,\ y(3)=26.$

13.61. $\int\limits_0^2 [y^2 + (y')^2 - 2xy]\,dx \to \min; \quad y(0)=0,\ y(2)=3.$

Исследовать задачу

13.62. $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 e^x[(y')^2 + 2y^2]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0)=1,\ y(1)=e.$

13.63. $\int\limits_0^1 e^y (y')^2\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0)=0,\ y(1)=\ln 4.$

13.64. $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{(y')^2}\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(1)=1,\ y(2)=4.$

13.65. $\int\limits_0^1 (1+x)(y')^2\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0)=0,\ y(1)=1.$

13.66. $\int\limits_0^{\pi/2} [y^2 - (y')^2]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

13.67. $\int\limits_{-1}^2 y'(1 + x^2 y')\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(-1)=1,\ y(2)=4.$

13.68. $\int\limits_{-1}^1 [(y')^3 + (y')^2]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(-1)=-1,\ y(1)=3.$

13.69. $\int\limits_0^{\pi/4} [4y^2 - (y')^2 + 8y]\,dx \to \mathrm{extr}; \quad y(0)=-1,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

Найти экстремали изопериметрической задачи

13.70. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^1 xy'\,dx = 2,\ y(0)=0,\ y(1)=0.$

13.71. $\int\limits_0^{\pi/6} [(y')^2 - 9y^2]\,dx \to extr; \ \int\limits_0^{\pi/6} 2y\,dx = 1,\ y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0.$

13.72. $\int\limits_0^1 [yy' + (y')^2]\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^1 12xy\,dx = 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 3.$

13.73. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^1 ye^{-x}\,dx = e,\ y(0) = 2e + 1,\ y(1) = 2.$

13.74. $\int\limits_0^1 [(y')^2 + 3x^4 + 8e^{2x}\cos 3x]\,dx \to extr;\ \int\limits_0^1 [2y - (y')^2]\,dx = -1,$
$y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

13.75. $\int\limits_0^\pi [(y')^2 + y^2]\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^\pi e^{-x}y\,dx = \dfrac{1 - (1 + 2\pi)e^{-2\pi}}{4\pi},$
$y(0) = 0,\ y(\pi) = e^{-\pi}.$

13.76. $\int\limits_0^1 (y')^2\,dx \to extr;\ \int\limits_0^1 y\,dx = 1,\ \int\limits_0^1 xy\,dx = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0.$

13.77. Доказать, что изопериметрическая задача

$$\int\limits_0^1 y_1'y_2'\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^1 y_1\,dx = 1,\ \int\limits_0^1 y_2\,dx = 0,$$
$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_1(1) = 0,\ y_2(1) = 1$$

не имеет решения.

13.78. Доказать, что изопериметрическая задача

$$\int\limits_0^1 y_1'y_2'\,dx \to extr; \quad \int\limits_0^1 xy_1\,dx = 1,\ \int\limits_0^1 xy_2\,dx = 0,$$
$$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_1(1) = 0,\ y_2(1) = 1$$

не имеет решения.

13.79. Найти геодезические линии конуса $x^2 + y^2 = z \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

13.80. Найти геодезические линии параболоида вращения
$2z = x^2 + y^2$.

14. ОТВЕТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1.1. Указание. Воспользоваться определением дифференцируемости по Фреше.

1.2. Указание. Воспользоваться определением первой вариации.

1.3. $J'(y) = 0,\ J'_w(y) = 0.$

1.4. Указание. Следует заметить, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = 0 \quad \forall h_1, h_2.$$

В то же время

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h, h^2) - f(0,0)}{h} = \frac{1}{2}.$$

1.5. Указание. Воспользоваться определениями сильной дифференцируемости и непрерывности функционала.

1.6. Указание. Рассмотреть функцию $f(x_1, x_2) = 1$ при $x_2 = x_1^2$, $x_1 \neq 0$ и $f(x_1, x_2) = 0$ в остальных точках (x_1, x_2). Заметить, что эта функция не является непрерывной в точке $(0, 0)$, но имеет в этой точке первую вариацию, равную нулю.

1.7. Для $J(x) = f(x_1, x_2)$ вычислить слабый дифференциал $\delta J(0, h)$ и показать, что он не является линейным по h.

1.8. $dJ(y, h) = J'(y)(h) = 2(y, h).$

1.9. При $\alpha > 1$ функционал дифференцируем во всех точках $y \in Y$. При $0 < \alpha \leq 1$ – во всех точках $y \neq 0$.

1.10. Функционал дифференцируем по Гато и Фреше, имеет слабую и сильную производные, причем

$$dJ(y, h) = \delta J(y, h) = \int\limits_a^b F'_y(x, y(x)) h(x)\, dx.$$

Указание. См. теорему 1.5 и следствие 1.1.

1.11. $dJ(y, h) = J'(y)(h) = h(a).$

1.12. $dJ(y, h) = J'(y)(h) = \cos y(a) \cdot h(a) - \sin y(b) \cdot h(b).$

1.13. $dJ(y, h) = J'(y)(h) = \int\limits_a^b \cos y(x) \cdot h(x)\, dx.$

1.14. $dJ(y, h) = J'(y)(h) = \cos\left(\int\limits_a^b y(x)\, dx\right) \int\limits_a^b h(x)\, dx.$

1.15. $\delta J(y, h) = J'_w(y)(h) = h(0) + \int\limits_{-1}^{1} xh(x).$

1.16. $\delta J(y, h) = J'_w(y)(h) = y(a)h(b) + y(b)h(a).$

1.17. $\delta J(y, h) = J'_w(y)(h) = y(b)h(b) - y(a)h(a).$

2.1. Указание. Убедиться в том, что при $t = \pm 1$ функция ψ имеет производные любого порядка, равные нулю.

2.2. Указание. Воспользоваться леммой Дюбуа-Реймона с $f(x) \equiv 0$.

2.3. $y = -\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2x}{15}$.

2.4. $y = x^3$.

2.5. Все функции $y \in C^1[a,b]$ такие, что $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

2.6. Решений нет.

2.7. $y = \cos x - \sin x$.

2.8. Решений нет.

2.9. $y = \dfrac{1}{12}(x^3 - x)$.

2.10. $y = \ln x$.

2.11. $y = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right)^2$.

2.12. $y = \left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$.

2.13. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

2.14. Все функции $y \in C^1[0,3]$, удовлетворяющие условиям $y(0) = 1$, $y(3) = 2$.

2.15. Все функции $y \in C^1[2,7]$, удовлетворяющие условиям $y(2) = 3$, $y(7) = 0$.

2.16. $y = \dfrac{-x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$.

3.1. $y \equiv C$, где C - произвольная постоянная.

3.2. $y = -\dfrac{x^2}{4} + C$, где C - произвольная постоянная.

3.3. $y = \dfrac{1}{2x} + C$, где C - произвольная постоянная.

3.4. $y = \dfrac{\sin x}{2} + \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)\cos x$.

3.5. $y \equiv 0$.

3.6. $y = \dfrac{e^{x+2} + e^{-x}}{e^{-2} - e^2} + \dfrac{x}{2}e^x$.

3.7. $y = \dfrac{1}{2}(\sin x - \operatorname{sh} x + \operatorname{cth}\dfrac{\pi}{2}\operatorname{ch} x)$.

3.8. Решений нет.

3.9. Решений нет.

3.10. $y = \dfrac{2x^3 + 1}{6(e^{-3} - 1)x^2} + \dfrac{x}{3}(\ln x - 1)$.

3.11. $y = \left[\ln(\sqrt{2}\sin x) + \dfrac{\pi}{4}\right]\sin x + \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cos x$.

4.1. $y = -2x, \quad b = 1$.

4.2. $y \equiv 0, \quad b = 1$.

4.3. $y \equiv 0, \quad a = 0$.

4.4. $y = 9x, \quad b = 1/3$.

4.5. $y = \dfrac{x^2}{4}, \quad a = -2\sqrt{c}$.

4.6. $y = \dfrac{x^2}{4} - (1+\sqrt{5})x$, $b = 8 + 4\sqrt{5}$.

4.7. $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt[6]{2}.$

4.8. $y=\sqrt{x(10-x)},\, b=\dfrac{5(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}};\; y=-\sqrt{x(10-x)},\, b=\dfrac{5(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}.$

4.9. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

4.10. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}.$

4.11. $\dfrac{\sqrt{11-6\sqrt{3}}}{2}.$

5.1. $y = -\dfrac{5}{6}x + 1.$

5.2. $y = \dfrac{3}{x}.$

5.3. $y = x^2 + 1.$

5.4. $y = \operatorname{ch} 2x.$

5.5. $y = x + \dfrac{1}{x} - 2.$

5.6. $y = -\dfrac{1}{4}(x^2 + 3).$

5.7. $y \equiv 0.$

5.8. $y = -\sin x - \cos x.$

5.9. $y = \operatorname{ch} x.$

5.10. $y \equiv 1.$

5.11. $y = \cos x - 1.$

5.12. $y = \ln(x+1) - 1.$

5.13. $y = e^x + \sin x.$

5.14. Решений нет.

5.15. $y = \sqrt{x+1}.$

6.1. $y = C_1x + C_2$, $z = C_3x + C_4$, где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

6.2. $y = (C_1 - 2C_4 + C_3x)\cos x + (C_2 + 2C_3 + C_4x)\sin x,$
$z = (C_1 + C_3x)\cos x + (C_2 + C_4x)\sin x$, где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

6.3. $y = \sin 2x,\; z = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi x}{8}.$

6.4. $y = -\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{5x}{6} + 1,\; z = x.$

6.5. $y = z = \sin x.$

6.6. $y = \dfrac{x^2}{2} + 1,\; z = x.$

6.7. $y = 2x + 1,\; z = x - 2.$

6.8. $y = e^x,\; z = e^{-x}.$

6.9. $y = -C\sin x - \cos x - \dfrac{x\sin x}{4} + x, \quad z = C\sin x + \dfrac{x\sin x}{4}$, где C – произвольная постоянная.

6.10. $y = \sin 2x,\; z = -\sin 2x.$

6.11. $y = \sin x,\; z = -\sin x.$

6.12. Решений нет.

7.1. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$, где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

7.2. $y = \dfrac{x^7}{7!} + \sum\limits_{k=0}^{5} C_k x^k$, где $C_0, \ldots, C_5$ – произвольные постоянные.

7.3. $y = -\dfrac{\rho}{24\mu}(x^2 - \ell^2)^2.$ **7.4.** $y = x.$

7.5. $y = \cos x.$ **7.6.** $y = -2x^3 + 3x^2.$

7.7. $y = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x.$ **7.8.** $y = \dfrac{x^5 + 3x^3 - 2x^2}{10}.$

7.9. $y = \operatorname{sh} x.$ **7.10.** $y = x + \cos x.$

7.11. $y = \operatorname{ch} x.$ **7.12.** $y = x^3.$

7.13. Все функции $y \in C^2[a,b]$, удовлетворяющие условиям $y(a) = y_a$, $y'(a) = y'_a$, $y(b) = y_b$, $y'(b) = y'_b$.

7.14. Решений нет. **7.15.** Решений нет.

8.1. Указание. Заметить, что

$$\alpha J(y_1) + (1-\alpha)J(y_2) - J(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) = \alpha(1-\alpha)\int\limits_a^b (y'_1 - y'_2)^2\,dx \geq 0$$

для всех $y_1, y_2 \in C^1[a,b]$. В то же время

$$\alpha J(y_1) + (1-\alpha)J(y_2) - J(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) = 0$$

тогда и только тогда, когда $y'_1(x) \equiv y'_2(x)$.

8.2. Указание. Воспользоваться свойством модуля

$$|\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2| \leq \alpha|x_1| + (1-\alpha)|x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

8.3. Не является. Указание: взять $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) \equiv 0$.

8.4. Не является. Указание: взять $y_1(x) = -2x$, $y_2(x) = x$ и $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

8.5. $y = x^5 - x^3.$ **8.6.** $y = x^3 + x.$

8.7. $y = 2 - \sqrt{5 - x^2}.$ **8.8.** $y = \ln x.$

8.9. $y = x^2.$ **8.10.** $y = \dfrac{x^2}{2}.$

8.11. $y = 2 - x.$ **8.12.** $y = \dfrac{2}{x} - 1.$

8.13. $y = \dfrac{3x^5 - 10x^3 + 7}{30}.$ **8.14.** $y = x^4 - x^2.$

8.15. $y = \operatorname{sh} x.$ **8.16.** $y = x^3 - x^2.$

9.1. $\delta^2 J(y,h) = 6\int\limits_a^b y'(h')^2\,dx.$ **9.2.** $\delta^2 J(y,h) = -2\int\limits_a^b (h')^2\,dx.$

9.3. $\delta^2 J(y,h) = 2\int\limits_a^b [h^2 - (h')^2]\,dx.$

9.4. Указание. Для функционала $\widetilde{J}(y) = -J(y)$ воспользоваться теоремой 9.1.

9.5. Указание. Для функционала $\widetilde{J}(y) = -\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ воспользоваться теоремой 9.2.

9.6. $\delta^2 J(y,h) =$
$$= \int\limits_a^b [F''_{y'y'}(x,y,y')(h')^2 + 2F''_{yy'}(x,y,y')hh' + F''_{yy}(x,y,y')h^2]\,dx +$$
$$+ g''_{uu}(y(a),y(b))h^2(a) + 2g''_{uv}(y(a),y(b))h(a)h(b) + g''_{vv}(y(a),y(b))h^2(b).$$

9.7. $\delta^2 J(y,h) =$
$$= \int\limits_a^b [F''_{y''y''}(x,y,y'')(h'')^2 + 2F''_{yy''}(x,y,y'')hh'' + F''_{yy}(x,y,y'')h^2]\,dx.$$

9.8. Экстремаль $y = x^3$, условие Лежандра выполнено.

9.9. Экстремаль $y \equiv 0$, условие Лежандра не выполнено.

9.10. Экстремаль $y = x^2$, условие Лежандра выполнено.

9.11. Экстремаль $y = x - 1$, условие Лежандра не выполнено.

10.1. $y = 2x - 1$

10.2. $y = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

10.3. $y \equiv 1$.

10.4. $y = \dfrac{x}{2}$.

10.5. $y = x^2$.

10.6. $y = x - 1$.

10.7. Точек экстремума нет.

10.8. Точка локального минимума $y = 7 - \dfrac{4}{x}$; точек локального и глобального максимума нет.

10.9. Точка локального минимума $y = x^3$; точек локального и глобального максимума нет.

10.10. Точка локального максимума $y = \sin 2x$; точек локального и глобального минимума нет.

10.11. Точка локального максимума $y = \sin 2x - 1$; точек локального и глобального минимума нет.

10.12. Точка локального максимума $y = \dfrac{3}{2}x$; точек локального и глобального минимума нет.

10.13. При $a < -\dfrac{2}{3}$ решение $y = (a+1)x - 1$; при $a \geq -\dfrac{2}{3}$ решений нет.

10.14. При $0 < a < \dfrac{\pi}{4}$ точка минимума $y \equiv 0$; при $a = \dfrac{\pi}{4}$ точка минимума $y = C\sin 4x$, где C – произвольная постоянная; при $a > \dfrac{\pi}{4}$ решений нет.

11.1. $y = 3x^2 - 4x + 1$.

11.2. Решений нет.

11.3. $y = 6x$.

11.4. Решений нет.

11.5. $y = 6(x^2 - x)$.

11.6. $y = \dfrac{8}{\pi} x \cos x$.

11.7. $y = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{3}{2}x$.

11.8. $y = -\dfrac{4}{\pi} \sin x + 1$.

11.9. $y = \cos x$.

11.10. $y = \sqrt{2} \sin \pi n x$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

11.11. $y = 2 \sin \pi n x$, где $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

11.12. $y = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2}$.

11.13. $y = \pm \sin x + x$.

11.14. $y = x$.

11.15. $y = xe^x$.

11.16. $y = 2 \sin x + \cos x + 1$.

11.17. $y = -10x^3 - 12x^2 + 6x + 2$.

12.1. $\sqrt{6}$.

12.2. Если начальная точка A и конечная точка B не лежат на одной образующей цилиндра, то $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = C_1 \varphi + C_2$, где C_1, C_2 – постоянные. Если же $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_0, y_0, z_1)$, то $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 + (z_1 - z_0)t$, где $0 \le t \le 1$.

12.3. $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$.

Указание. Исследовать приращение функционала, соответствующее вариациям $\delta y_1 = \delta y_2$.

12.4. Минимум на функциях $y_1 = -x + 2$, $y_2 = x + 1$.

Указание. Исследовать приращение функционала, соответствующее вариациям $\delta y_1 = 2\delta y_2$.

12.5. Минимум на функциях $y_1 = e^x + ex$, $y_2 = ex$.

Указание. Исследовать приращение функционала, соответствующее вариациям $\delta y_1 = \delta y_2$.

12.6. Указание. Найти экстремаль

$$y_1 = \cos x + \sin x,\ y_2 = \cos x - \sin x$$

из необходимого условия экстремума и далее исследовать знак приращения функционала, соответствующего вариациям $\delta y_1 = -\delta y_2 = \dfrac{1}{n} \sin 2x$, где $n \in \mathbb{N}$.

12.7. $y_1 = 2 \operatorname{ch} x$, $y_2 = 2 \operatorname{sh} x$.

12.8. $y_1 = -\dfrac{x^2}{2}$, $y_2 = x$.

12.9. $y_1 = xe^x + e^{-x}$, $y_2 = (1 + x)e^x - e^{-x}$.

12.10. Указание. Найти экстремаль

$$y_1 = x^2 + \cos x + \sin x,\ y_2 = x^2 - \cos x - \sin x$$

из необходимого условия экстремума и далее исследовать знак приращения функционала, соответствующего вариациям $\delta y_1 = -\delta y_2 = \dfrac{1}{n} \sin 2x$, где $n \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. М.: Наука. 1984. 288 с.

2. Игнатьева Н.У. Элементы функционального анализа и вариационного исчисления. М.: Изд-во МЭИ. 1999. 36 с.

3. Краснов М.Л., Макаренко Р.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. М.: УРСС, 2002. 166 с.

4. Петрушко И.М., Илюшкин В.А. Курс высшей математики. Вариационное исчисление. Лекции и практические занятия. М.: Издательство МЭИ. 2006. 170 с.

5, Сборник задач по математике для втузов. Часть 3. (Под. ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова.) М.: Физматлит. 2002. 574 с.

6. Треногин В.А., Писарева Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука. 1984. 256 с.

7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Функционалы. Сильная и слабая дифференцируемость. Необходимое условие экстремума 3
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера 9
3. Задача со свободными концами 16
4. Задача с подвижными концами 19
5. Задача Больца 22
6. Функционалы вида $J(\overrightarrow{y}) = \int\limits_a^b F(x, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}\,')\,dx$ 26
7. Функционалы вида $J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ 29
8. Минимизация выпуклых функционалов 33
9. Вторая вариация функционала. Необходимое условие экстремума в терминах второй вариации. Условие Лежандра 36
10. Классические достаточные условия экстремума 38
11. Изопериметрические задачи 41
12. Вариационные задачи на условный экстремум с голономными и неголономными условиями связи 45
13. Разные задачи 50
14. Ответы и методические указания 56

Литература 62

Учебное издание

Андрей Авенирович Амосов, Наталья Уханьевна Игнатьева,
Александр Вадимович Перескоков

ЗАДАЧИ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие
по курсу
"Дифференциальные уравнения"

Редактор
Редактор издательства

ЛР № от

Темплан издания МЭИ 2007(I), учебн. Подписано к печати
Формат $60 \times 84/16$ Физ. печ. л. 4,0 Уч.-изд. л. 3,2 Тираж
Изд. № Заказ № Цена руб.

Издательство МЭИ, 11250, Москва, Красноказарменная. д. 14
Отпечатано в типографии издательства "Фолиум"
Москва, 127238, Дмитровское ш., д.58